ФОРМИ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ДАНИХ В ФІБОНАЧЧІ-ПРОЦЕСОРАХ

Лужецький В.А.
Вінницький державний технічний університет

Abstract

Luzetsky V. The forms of data representation in Fibonacci-processors. *The Fibonacci coding of such mathematical plants as whole and real numbers, vectors of three-dimensional space, complex numbers, quaternions, numbers Cayley, polynomials and matrixes is described. The classification of the forms of data representation in Fibonacci-processors is presented and the structures of these forms are considered, and also the ranges of representation of data are specified.*

Вступ

Фібоначчі-процесор (Ф-процесор) - це функціонально орієнтований процесор, який здійснює арифметичні і алгебричні обчислення над кодованими математичними об`єктами (МО). Класичними формами представлення чисел у ЦОМ є форми з фіксованою і плаваючою комою. Вони також можуть бути використані для представлення чисел в Ф-процесорах. Однак в Ф-процесорах існують можливості представлення інших МО, що дозволяє говорити про форми представлення даних, а не тільки чисел. Крім того, особливості "фібоначчієвого" представлення даних дозволяють запропонувати ряд нових форм.

Кожній з форм представлення даних, що розглядаються нижче, відповідає своя структура. Сучасний підхід [1] до завдання структури даних полягає у тому, що належність даних до того чи іншого типу (форми) позначається за допомогою тега. Теги приєднуються до самих даних. Цей спосіб ідентифікації даних має такі переваги.

Підвищується ефективність знаходження помилок при спробі виконання операцій між невідповідними типами даних, неповної визначеності даних.

Оскільки для ряду операцій використовується одна й та ж команда, можна зробити незалежними операційну та операндну частини команди і зменшити розрядність операційної частини командного слова. Наприклад, для операції додавання бажано мати одну команду незалежно від типу даних.

1. "Фібоначчієве" кодування математичних об'єктів

У Ф-процесорах кодування МО здійснюється з використанням базисів $\{w_i\}_p$, елементи яких задовольняють різницевому рівнянню

$$w_{i+p+1} - w_{i+p} - w_i = 0 . \qquad (1)$$

Вибираючи відповідні початкові значення $w_0, w_1, \dots, w_p$ можна забезпечити кодування таких МО: цілих і дійсних чисел, векторів тривимірного простору, комплексних чисел, кватерніонів, чисел Келі (октав), поліномів і матриць. Причому базис може бути або постійним, або змінним. Постійний базис складається з елементів, що не залежать від значень МО. Тоді як набір елементів змінного базису визначається значенням МО.

Спочатку розглянемо кодування з використанням постійного базису.

Будь-яке додатне ціле число можна представити у вигляді:

$$N = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i,$$

де $a_i = \{0;1\}$,

$w_i = \varphi_p(i)$ - i-е p-число Фібоначчі, $p \geq 1$.

Набір $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1$ називається *мінімальною формою* (*М-формою*) p-коду Фібоначчі, якщо $a_i = 1$ і $a_{i-k} = 0$ для $i = p+1, p+2, \ldots, n$, $1 \leq k \leq p$ [2].

Елементи базисної послідовності φ_p обчислюються на основі рекурентного співвідношення

$$\varphi_p(i+p+1) = \varphi_p(i+p) + \varphi_p(i)$$

при $\varphi_p(0) = 0, \varphi_p(1) = \cdots = \varphi_p(p) = 1$, $i = 0, 1, \ldots$

Для представлення від'ємних цілих чисел потрібна додаткова цифра знаку.

Можливість представлення чисел різних знаків забезпечується базисною послідовністю φ_p^-, елементи якої обчислюються на основі рекурентного співвідношення:

$$\varphi_p(i) = \varphi_p(i+p+1) - \varphi_p(i+p), \quad i = -1, -2, \ldots$$

Різницевому рівнянню (1) відповідає характеристичне рівняння

$$\lambda^{p+1} - \lambda^p - 1 = 0,$$

яке має корені $\alpha_{p1}, \alpha_{p2}, \ldots, \alpha_{p(p+1)}$.

Кожен з коренів утворює свою базисну послідовність. Дійсний корінь називають [2] золотою p-пропорцією. Він утворює базис α_p виду $\cdots \alpha_p^3 \alpha_p^2 \alpha_p^1 \alpha_p^0 \alpha_p^{-1} \alpha_p^{-2} \cdots$, елементи якого можуть бути обчисленні за формулою:

$$\alpha_p^{i+p+1} = \alpha_p^{i+p} + \alpha_p^i.$$

Використовуючи цей базис, можна представити будь-яке додатне ціле число N у вигляді:

$$N = \sum_{i=-m}^{n} a_i \alpha_p^i. \tag{2}$$

Представлення (2) ізоморфне представленню нулю у вигляді:

$$0 = \sum_{i=-m}^{n} a_i \varphi_p(i).$$

Лівий зсув даної суми забезпечує представлення будь-якого цілого додатного числа

$$N = \sum_{i=-m}^{n} a_{i-1} \varphi_p(i).$$

При цьому як базис використовується розширена або двостороння послідовність φ_p^* p-чисел Фібоначчі, що утворюється об'єднанням послідовностей φ_p і φ_p^-.

Представлення дійсного числа x в базисі α_p має вигляд:

$$x = \sum_{i=-m}^{n} a_i \alpha_p^i .$$

Таким чином, базиси φ_p, φ_p^- і φ_p^* породжують p-коди Фібоначчи, а базис α_p - код золотої p-пропорції.

Вектори тривимірного простору, комплексні числа, кватерніони, числа Келі (октави), поліноми і матриці можна розглядати як системи, що утворені відповідною кількістю базисних векторів, в котрих кожному МО відповідає упорядкований набір з дійсних чисел, що називаються координатами.

Однак неможливо говорити про представлення у ЦОМ неперервної множини дійсних чисел, оскільки дискретність представлення інформації та скінченна розрядність даних, що характерні для ЦОМ, породжують скінченну множину чисел. Тому, практично, є можливість представляти дійсні числа тільки як раціональні числа. Якщо останні відображати в цілі числа [3], то з'являється можливість розглядати МО тільки з цілочисельними координатами.

Виходячи з цього, вказані вище МО (крім цілих і дійсних чисел) представляються у вигляді:

$$\mu = \sum_{l=-m}^{n} a_l w_l .$$

де $a_l = \{-1;0;1\}$;

$w_l = \varphi_1(l-1) + \varphi_1(l)i$ - для комплексних чисел;

$w_l = \varphi_2(l-2)\mathbf{i} + \varphi_2(l-3)\mathbf{j} + \varphi_2(l-1)\mathbf{k}$ - для тривимірних векторів;

$w_l = \varphi_3(l-3) + \varphi_3(l-4)i + \varphi_3(l-5)j + \varphi_3(l-2)k$ - для кватерніонів;

$w_l = \varphi_7(l-7) + \varphi_7(l-8)i + \varphi_7(l-9)j + \varphi_7(l-10)k + \varphi_7(l-11)e +$
$+ \varphi_7(l-12)ie + \varphi_7(l-13)je + \varphi_7(l-6)ke$ - для чисел Келі (октав);

$$\mathbf{w}_l = \begin{vmatrix} \varphi_3(l-3) & \varphi_3(l-4) \\ \varphi_3(l-5) & \varphi_3(l-2) \end{vmatrix}$$ - для матриць;

$$w_l = \varphi_3(l-2)x^3 + \varphi_3(l-5)x^2 + \varphi_3(l-4)x + \varphi_3(l-3)$$ - для поліномів третього степеня.

У змінному базисі будь-яке ціле число z представляється у вигляді [4]:

$$z = \sum_{i=1}^{p+1} q_i \varphi_p(j+i-p),$$

де q_i - цілі числа;

$j = f(z)$; $j = 0,1,\ldots$; $p \ge 1$.

Тут базис складається з $p+1$ елементів. Причому значення цих елементів залежать від значення індексу j, який, у свою чергу, залежить від значення числа. Для отримання автоматного представлення q_i і j використовується кодування цілих чисел у постійному базисі.

При представленні дійсних чисел існує поняття цілої та дробової частин. Для того, щоб відокремити цілу частину від дробової, між їхніми кодами в представленні дійсного числа розміщують кому. І тоді в ЦОМ відрізняють представлення чисел з фіксованою й плаваючою комою. Причому, у випадку з фіксованою комою або ціла, або дробова частина дорівнює нулю.

При представленні дійсних чисел у базисі α_p неможливо виділити цілу й дробову частини, але між тим введемо кому в код золотої p-пропорції. В нашому випадку кома буде вказувати межу між частинами коду, які відповідають елементам базису з додатними й від'ємними степенями.

Нехай q_0 - код золотої p-пропорції дійсного числа x. Тоді у змінному базисі $\left\{\alpha_p^{-j}\right\}$ це число можна зобразити таким чином:

$$x = (q_{0j})\alpha_p^{-j},$$

де $(q_{0j}) = (q_0)\alpha_p^j$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Тут кома переміщується відносно її положення в початковому коді q_0. Це є представлення з плаваючою комою, в якому q_{0j} - код мантиси, а j - порядок.

Нормалізована мантиса (q) повинна задовольняти таку умову:

$$\alpha_p^{k-1} \le (q) < \alpha_p^k,$$

де $k = 1 - \left]\log_{\alpha_p} 2\right[$.

МО у змінному базисі представляються шляхом представлення їх цілочисельних координат у відповідному змінному базисі. Причому, у загальному випадку, індекси усіх базисів можуть бути різними.

2. Класифікація форм представлення даних

Виходячи з описаних вище представлень цілих і дійсних чисел, а також інших МО, пропонується класифікація форм представлення даних в Ф-процесорах, що наведена на рис.1.

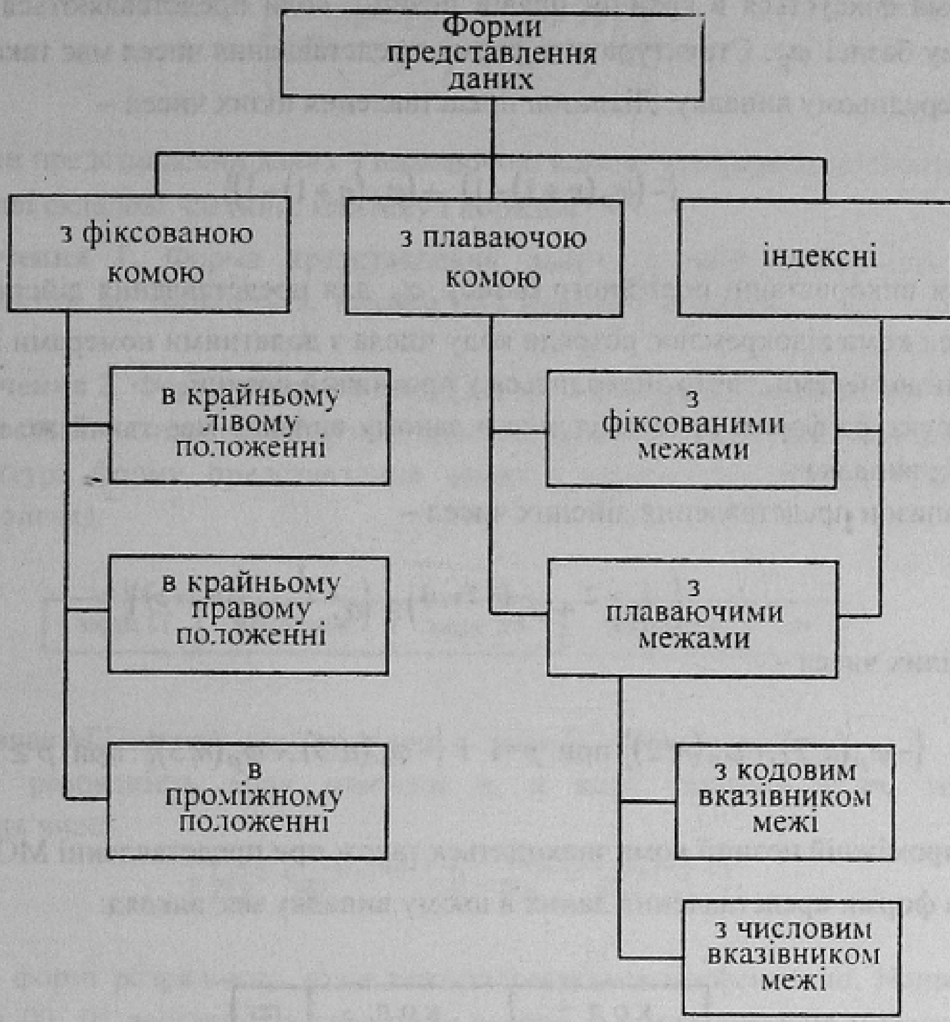

Рис. 1. Класифікація форм представлення даних

Форми представлення даних з фіксованою комою утворені постійними базисами, а форми з плаваючою комою і індексні - змінними базисами.

Постійний базис $\{\alpha_p^i\}$ при i - цілих, від'ємних забезпечує представлення дійсних чисел $x < 1$. В цьому випадку кома фіксується перед самим старшим розрядом коду числа, тобто в крайній лівій позиції. Структура такої форми має вигляд:

знак	к о д ч и с л а	тег

Додатні числа, як знак, мають символ 0, а від'ємні - символ 1.

Для n-розрядного коду числа діапазон представлень

$$\pm\left\{\alpha_p^{-n};\ \left(1-\alpha_p^{-n-r}\right)\right\}.$$

а абсолютна похибка представлення числа –

$$\Delta = \pm\alpha_p^{-n-p}$$

Кома фіксується в крайній правій позиції, коли представляються цілі числа у постійному базисі φ_p. Структура цієї форми представлення чисел має такий же вигляд, як і в попередньому випадку. Діапазон представлення цілих чисел –

$$\{-(\varphi_p(n+1)-1);+(\varphi_p(n+1)-1)\}.$$

При використанні постійного базису α_p для представлення дійсних або тільки цілих чисел кома відокремлює розряди коду числа з додатними номерами від розрядів з від'ємними номерами, тобто знаходиться у проміжній позиції.

Структура форми представлення в даному випадку має такий же вигляд, як і в попередніх випадках.

Діапазон представлення дійсних чисел –

$$\left\{-\left(\alpha_p^{n\,2}+\alpha_p^{-(n\,2+p)}\right);+\left(\alpha_p^{n\,2}+\alpha_p^{-(n\,2+p)}\right)\right\},$$

а цілих чисел –

$$\{-\varphi_p(n/2);+\varphi_p(n/2)\} \text{ при } p=1 \text{ і } \{-\varphi_p(n/3);+\varphi_p(n/3)\} \text{ при } p\ge 2.$$

У проміжній позиції кома знаходиться також при представленні МО у базисі φ_p^*. Структура форми представлення даних в цьому випадку має вигляд:

код +	код -	тег

Тут "код +" означає код МО, який містить символи 0 і 1, а "код -" - це код МО, який містить символи 0 і -1.

Якщо "код +" і "код -" мають по n розрядів, то вони забезпечують такі діапазони представлень:

- для цілих чисел

$$\{-\varphi_p(n/2);+\varphi_p(n/2)\} \text{ при } p=1 \text{ і } \{-\varphi_p(n/3);+\varphi_p(n/3)\} \text{ при } p\ge 2;$$

- для дійсної і уявної частин комплексних чисел

$$\left\{-\varphi_1\left(\frac{n-2}{2}\right);+\varphi_1\left(\frac{n-2}{2}\right)\right\};$$

- для коефіцієнтів тривимірних векторів

$$\left\{-\varphi_2\left(\frac{n-9}{3}\right);+\varphi_2\left(\frac{n-9}{3}\right)\right\};$$

- для коефіцієнтів кватерніонів і поліномів третього степеня, чисел 2×2 матриць

$$\left\{-\varphi_3\left(\frac{n-15}{3}\right);+\varphi_3\left(\frac{n-15}{3}\right)\right\}.$$

Форми представлення даних з плаваючою комою утворюються змінним базисом α_p і мають дві складові частини: мантису і порядок.

Означення 1. Форма представлення даних, в якій розрядність кодів її складових частин не змінюється, називається *формою представлення з фіксованими межами.*

Означення 2. Форма представлення даних, в якій розрядність кодів її складових частин змінюється, називається *формою представлення з плаваючими межами.*

Структура форми представлення даних з плаваючою комою і фіксованими межами має вигляд:

знак П	порядок	знак М	мантиса	тег

Тут "знак М" означає знак мантиси, а "знак П" - знак порядку.

Якщо розрядність коду мантиси n, а коду порядку - m, то діапазон представлення чисел

$$\pm\left\{\alpha_p^{-k-1}\alpha_p^{-\varphi_p(m)+1};\left(1-\alpha_p^{-n-p}\right)\alpha_p^{\varphi_p(m)-1}\right\}.$$

В цій формі розрядність кодів використовується неефективно. Наприклад, для коду порядку 00...01 достатньо всього один розряд, а решта розрядів можна приєднати до коду мантиси для збільшення його розрядності. Аналогічно можна зменшити розрядність коду мантиси 10...00, відкидаючи молодші розряди, і збільшити розрядність коду порядку. Таким чином приходимо до форми представлення даних з плаваючими межами. Місцеположення межі між мантисою і порядком можна вказати або номером розряду (числовий вказівник), або спеціальним набором символів (кодовий вказівник).

Структура форми з кодовим вказівником межі між мантисою і порядком має вигляд:

знак П	знак М	порядок	мантиса	тег

Для представлення порядку використовується C_2-форма p-коду, а мантиси – C_3-форма, але без вказання правої межі, яка жорстко зафіксована між мантисою і тегом.

Означення 3. Форма p-коду, що отримана з М-форми шляхом відкидання усіх нулів старших розрядів до першої одиниці, називається C_2-*формою.*

Означення 4. Форма коду, що отримана з М-форми шляхом відкидання усіх нулів молодших розрядів, крім одного, до першої одиниці, називається C_3-*формою*.

Якщо коди порядку і мантиси разом мають n розрядів, то максимальна кількість розрядів, яка може бути використана кожним з кодів, також дорівнює n. Дійсно, якщо код порядку має усі нулі, то його можна вилучити повністю, а якщо код нормалізованої мантиси має вигляд $\underbrace{0\ldots0}_{k}100\ldots0$, то його також можна вилучити повністю.

При цих умовах маємо такий діапазон представлення дійсних чисел:

$$\pm\left\{\alpha_p^{-k-1}\alpha_p^{-\varphi_p(n+1)+1};\alpha_p^{-k-1}\alpha_p^{\varphi_p(n+1)+1}\right\}. \tag{3}$$

Відомо [2], що М-форма p-кодів забезпечує знаходження помилок, які виникають при їх зберіганні або передаванні. Якщо усі складові частини форми представлення даних мають М-форму, то також забезпечується знаходження помилок. Проте, коли складові частини мають C_2- і C_3-форму, така можливість відсутня.

Структура форми з числовим вказівником межі між мантисою і порядком має вигляд:

знак П	знак М	порядок	мантиса	вказівник	тег

Якщо коди порядку і мантиси разом мають n розрядів, то для коду вказівника необхідно використовувати кількість розрядів m, яка визначається на підставі співвідношення

$$\varphi_p(m+1)\geq n.$$

Діапазон представлення чисел для даної форми визначається за формулою (3).

Індексні форми представлення даних утворюються змінним базисом φ_p і містять $p+1$ кодів координат q_i і код індексу j. Структура індексної форми з фіксованими межами має вигляд:

q_1"+"	q_1"-"	q_2"+"	q_2"-"	...	q_{p+1}"+"	q_{p+1}"-"	j	тег

Якщо коди q_i"+" і q_i"−" є n-розрядними, а код індексу j - m-розрядний, то маємо такі діапазони представлення:

- для цілих чисел

$$\{-\varphi_1(n/2)\varphi_1(\varphi_1(m+1)+1);+\varphi_1(n/2)\varphi_1(\varphi_1(m+1)+1)\} \quad \text{при } p=1;$$
$$\{-\varphi_p(n/3)\varphi_p(\varphi_p(m+1)+p);+\varphi_p(n/3)\varphi_p(\varphi_p(m+1)+p)\} \quad \text{при } p\geq 2;$$

- для дійсної й уявної частин комплексних чисел

$$\left\{-\varphi_1\left(\frac{n-2}{2}\right)\varphi_1(\varphi_1(m+1)+1);+\varphi_1\left(\frac{n-2}{2}\right)\varphi_1(\varphi_1(m+1)+1)\right\};$$

- для коефіцієнтів тривимірних векторів

$$\left\{-\varphi_2\left(\frac{n-9}{3}\right)\varphi_2(\varphi_2(m+1)+2);+\varphi_2\left(\frac{n-9}{3}\right)\varphi_2(\varphi_2(m+1)+2)\right\};$$

- для коефіцієнтів кватерніонів і поліномів третього степеня, чисел 2×2 матриць

$$\left\{-\varphi_3\left(\frac{n-15}{3}\right)\varphi_3(\varphi_3(m+1)+3);+\varphi_3\left(\frac{n-15}{3}\right)\varphi_3(\varphi_3(m+1)+3)\right\}.$$

Структура індексної форми з кодовим вказівником плаваючих меж між її частинами має вигляд:

q_1 "+"	q_1 "-"	q_2 "+"	q_2 "-"	...	q_{p+1} "+"	q_{p+1} "-"	j	тег

Для представлення q_i і j використовується C_2-форма p-коду.

Структура індексної форми з числовими вказівниками плаваючих меж між її частинами має вигляд:

q_1 "+"	q_1 "-"	q_2 "+"	q_2 "-"	...	q_{p+1} "+"	q_{p+1} "-"	j	вказівник 1

...	вказівник $2p$+1	вказівник $2p$+2	тег

Вказівники з першого до ($2p$+1)-й показують межі між усіма q_i, а вказівник $2p$+2 - межу для j. Розрядність l кодів вказівників визначається за співвідношенням:

$$\varphi_p(l+1)\geq n.$$

де n -кількість розрядів, що використовуються для усіх q_i і j.

Розрядність коду тега визначається, виходячи з кількості типів даних, які оброблятиме Ф-процесор. В табл.1 наведено можливі типи даних з урахуванням розглянутих форм представлення.

Відомо, що форма з плаваючою комою і фіксованими межами, у порівнянні з фіксованою комою, забезпечує більший діапазон представлення дійсних чисел і меншу відносну похибку, але абсолютна похибка у неї більше. Форма з плаваючою комою і плаваючими межами забезпечує ще більший діапазон представлення, але при цьому зменшується абсолютна похибка і в деяких випадках вона дорівнює абсолютній похибці форми з фіксованою комою.

У порівнянні з формою з фіксованою комою в проміжній позиції індексна форма забезпечує більший діапазон представлень МО. При цьому не вноситься додаткова похибка представлення, оскільки використовуються тільки цілочисельні координати.

Таблиця 1

Дані	Форми представлення								
	З фіксованою комою			З плаваючою комою			Індексні		
	Базис			Фіксована межа	Плаваюча межа		Фіксована межа	Флаваюча межа	
	φ_p	α_p	φ_p^*		Кодовий вказівник	Числовий вказівник		Кодовий вказівник	Числовий вказівник
Цілі числа	+	−	+				+	+	+
Раціональні числа	+	−	+				+	+	+
Дійсні числа $x<1$		−							
Дійсні числа	+	−	+	+	+	+	+	+	+
Комплексні числа			+				+	+	+
n-вимірні вектори			+				+		+
Кватерніони			+				+		+
Октави			+				+		+
Поліноми 3-го степеня			+				+		+
2×2 матриці			+				+		+

Нехай для p-коду (p=1) цілих чисел відведено n розрядів, не враховуючи розрядів коду тега. Тоді відношення максимальних чисел, які можуть бути представлені в індексній формі з фіксованими межами і формі з фіксованою комою в проміжній позиції, дорівнює:

$$\varphi_1\binom{n}{12}\varphi_1\left(\varphi_1\binom{n+3}{3}+1\right)\Big/\varphi_1\binom{n}{2}.$$

Тут для кодів q_1, q_2 і j відведено однакову кількість розрядів. Наприклад, при n=24 це відношення дорівнює α^{23}.

Висновки

1. Кодування з використанням р-чисел Фібоначчі забезпечує машинне представлення не тільки цілих і дійсних чисел, але і таких математичних об`єктів як, вектори тривимірного простору, комплексні числа, кватерніони, числа Келі (октави), поліноми і матриці.

2. Запропоновані форми представлення даних з плаваючими межами забезпечують більший діапазон представлення МО, ніж форма з фіксованими межами.

3. Перевагою індексної форми представлення, у порівнянні з формою з плаваючою комою, є можливість представлення різних МО, а не тільки дійсних чисел. Крім того, індексна форма забезпечує більший діапазон представлення дійсних чисел.

4. Для усіх форм представлення даних, крім форм з кодовим вказівником меж, коди їх складових частин можуть бути представлені у формах, котрі забезпечують знаходження помилок. Тому в тих випадках, коли треба забезпечити високу вірогідність зберігання й передавання інформації, не рекомендується застосовувати форми представлення даних з кодовим вказівником плаваючих меж. Але ці форми забезпечують найменшу розрядність кодів при тих же самих діапазонах представлення у випадках, коли не треба знаходити і виправляти помилки.

Література

1. Самофалов К.Г., Луцкий Г.М. Структуры и организация функционирования ЭВМ и систем. - К.: Вища школа, 1978. – 392 с.
2. Стахов А. П. Коды золотой пропорции.- М.: Радио и связь, 1984.- 152 с.
3. Грегори Р., Кришнамурти Е. Безошибочные вычисления. Методы и приложения: Пер. с англ. - М.: Мир, 1988. - 208 с.
4. Лужецький В.А., Мохаммад Аль-Майта. Спосіб зображення цілих чисел великого діапазону // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 1998. № 1. – С. 156-162.

Поступила в редакційну колегію 1.03.2000 р.