

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ СВЯЗИ ПРОЦЕССОВ, ИМЕЮЩИХ НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Башков Е.А., Богатырёв В.А

Кафедра ПМИ ДонГТУ, Кафедра МФ ДонГУ

bashkov@pmi.dgtu.donetsk.ua

## Abstract

*Bashkov E.A., Bogatyryov V.A. The determination of parameters a normal distributed processes connection. In this paper the method of moments is used for building up the model that has allowed to find the coefficients of the physical realized filter in the problem of the connection for two normal distributed stochastic processes. The results of numerical realization are represented in a graphical form.*

В практике научных исследований процессов различной природы встречаются задачи, в которых известны структуры их взаимодействия, но не известны или известны приблизительно числовые параметры законов, которыми они описываются. Данная статья посвящена определению параметров связи двух вероятностных процессов, имеющих нормальное распределение. При этом предполагается, что связь между этими процессами линейна и описывается дифференциальными уравнениями первого порядка.

## 1. Параметры нормального закона входного процесса

Пусть задана случайная величина  $x$ , распределенная по нормальному закону с параметрами  $a$  и  $\sigma$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad (1)$$

Если связь между случайными величинами  $y \in Y$ ,  $x \in X$  определяется функцией

$$y = \psi(x) = k\varphi(x), \quad (2)$$

где  $\varphi(x)$  трижды непрерывно дифференцируемая функция, а  $k > 0$ ,  $k$  - параметр, то математическое ожидание  $m_y$  и дисперсия  $D_y$  случайной величины  $y$  определяются согласно [1] формулами

$$m_y = k\varphi(m_x) + \frac{k}{2}\varphi''(m_x) \cdot D_x, \quad (3)$$

$$D_y = k^2 [\varphi'(m_x)]^2 \cdot D_x + \frac{k^2}{2} [\varphi''(m_x)]^2 \cdot D_x^2, \quad (4)$$

которые в нашем случае дают

$$\dot{m}_y = k \left\{ \varphi(a) + \frac{1}{2} \varphi''(a) \cdot \sigma^2 \right\} = k \zeta(a, \sigma), \quad (5)$$

$$D_y = k^2 \left\{ \varphi'(a)^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} (\varphi''(a))^2 \cdot \sigma^4 \right\} = k^2 \eta^2(a, \sigma). \quad (6)$$

Положим

$$a_1 = k \zeta(a, \sigma), \quad \sigma_1 = k \eta(a, \sigma) \quad (7)$$

параметрами нормального распределения случайной величины  $y$

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_1} \cdot e^{-\frac{(y-a_1)^2}{2\sigma_1^2}} \quad (8)$$

## 2. Физически осуществимый фильтр (ФОФ)

Для того, чтобы связать две нормально распределенные случайные величины, воспользуемся теорией линейных преобразований случайных процессов [2].

Положим

$$\begin{aligned} Q_n \left( \frac{d}{dt} \right) &= a_0 \frac{d^n}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_n; \\ P_m \left( \frac{d}{dt} \right) &= b_0 \frac{d^m}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \dots + b_m, \end{aligned} \quad (9)$$

$a_j, j = 0, 1, \dots, n, b_i, i = 0, 1, \dots, m$ , постоянные коэффициенты.

Если многочлен  $Q(iu)$  не имеет действительных корней, и порядки многочленов связаны неравенством  $n \geq m$ , то функция

$$H(iu) = \frac{P_{(iu)}}{Q_{(iu)}} \quad (10)$$

называется частотной характеристикой преобразования

$$Q_n \left( \frac{d}{dt} \right) x^*(t) = P_m \left( \frac{d}{dt} \right) x(t),$$

которое в простейшем случае имеет вид

$$a_0 \frac{dx^*}{dt} + a_1 x^* = b_0 \frac{dx}{dt} + b_1 x, \quad (11)$$

$$Q_1(iu) = a_0 iu + a_1, \quad P_1(iu) = b_0 iu + b_1.$$

Если  $a_0, a_1, b_0, b_1 \in R$  (то есть вещественные), то  $Q_1(iu)$  не имеет действительных корней при  $a_0^2 + a_1^2 \neq 0$ . Фильтр в этом случае является физически осуществимым, и его частотная характеристика равна

$$H(iu) = \frac{b_0 \cdot iu + b_1}{a_0 \cdot iu + a_1},$$

$$|H(iu)|^2 = c \left( 1 + \frac{e}{u^2 + d} \right),$$

$$c = \left( \frac{b_0}{a_0} \right)^2 > 0; \quad e = \left( \frac{b_1}{b_0} \right)^2 - \left( \frac{a_1}{a_0} \right)^2; \quad d = \left( \frac{a_1}{a_0} \right)^2 \geq 0, \quad e + d > 0. \quad (12)$$

(Если  $b_0 = a_0 = 0$ , то случай тривиален).

Для ФОФ (физически осуществимого фильтра) справедлива простая формула, связывающая спектральные плотности функций распределения вероятностей входа  $f_{вх}(u)$  и выхода  $f_{вых}(u)$

$$f_{вх}(u) = |H(iu)|^2 f_{вых}(u). \quad (13)$$

В свою очередь, спектральные плотности совпадают с обратным преобразованием Фурье от соответствующих корреляционных функций  $R(t)$

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut} R(t) dt.$$

Далее, по теореме Бохнера [2], корреляционная функция  $R(t)$  пропорциональна характеристической функции случайного процесса

$$R(t) = d\varphi(t). \quad (14)$$



Наконец, характеристическая функция процесса определяется по закону распределения вероятности  $\bar{F}(x)$

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} dF(x). \quad (15)$$

Заметим, что характеристическая функция однозначно определяет распределение случайной величины, и, при существовании момента  $n$ -го порядка  $M|x|^n$ , справедлива важная в приложениях формула

$$\varphi^{(n)}(0) = i^n Mx^n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (16)$$

В частности, для произвольного нормального распределения  $N(a, \sigma^2)$  справедлива формула [2]

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = e^{ita} - \frac{\sigma^2 t^2}{2}, \quad (17)$$

из которой в силу формулы (16) следуют, необходимые нам для дальнейшего равенства

$$M_0 = 1, \quad M_1 = a, \quad M_2 = a^2 + \sigma^2, \quad M_3 = a^3 + 3a\sigma^2,$$

$$M_4 = a^4 + 6a^2\sigma^2. \quad (18)$$

### 3. Уравнения метода моментов

Для определения параметров связи двух процессов, имеющих нормальное распределение, воспользуемся формулой (13), обозначив соответственно

$$f_{вх}(u) = g(u), \text{ типа } N(a_1, \sigma_1^2), \text{ где } a_1 \text{ и } \sigma_1 \text{ определены формулой (7).}$$

$$f_{вых}(u) = f(u), \text{ типа } N(a, \sigma^2), \text{ } a \text{ и } \sigma \text{ заданные константы.}$$

Итак,

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^l g(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} u^l |H(iu)|^2 f(u) du \quad (19)$$

$$l = 0, 1, 2, 3.$$

В силу формулы (12) при разных значениях  $l$  получаем

$$M_0 = \int_{-\infty}^{\infty} c \left( 1 + \frac{e}{u^2 + d} \right) f(u) du = 1 = c + ce \cdot I_1,$$

$$M_1 = \int_{-\infty}^{\infty} uc \left( 1 + \frac{e}{u^2 + d} \right) f(u) du = cN_1 + ce \cdot I_2,$$

(20)

$$M_2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 c \left( 1 + \frac{e}{u^2 + d} \right) f(u) du = cN_2 + ce - ced \cdot I_1,$$

$$M_3 = \int_{-\infty}^{\infty} u^3 c \left( 1 + \frac{e}{u^2 + d} \right) f(u) du = cN_3 + ceN_1 - ced \cdot I_2.$$

В этой формуле  $M_l$ ,  $N_l$ ,  $l=0, 1, 2, 3$ , моменты функций  $g(u)$  и  $f(u)$  соответственно, а

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u^2 + d} f(u) du, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u}{u^2 + d} f(u) du.$$

(21)

Система равенств (20) - это нелинейная система интегро-функциональных уравнений относительно параметров  $c$ ,  $e$ ,  $d$  из (12) и  $k$  из (7).

Дабы избежать путаницы, положим в формуле (7)

$$a_1 = k\zeta(a_0, \sigma_0), \quad \sigma_1 = k\eta(a_0, \sigma_0),$$

(22)

где  $a_0$ ,  $\sigma_0$  заданные константы.

Тогда в силу формулы (17)

$$M_1 = a_1 = k\zeta(a_0, \sigma_0) = k\mu_1;$$

$$M_2 = a_1^2 + \sigma_1^2 = k^2 (\zeta^2(a_0, \sigma_0) + \eta^2(a_0, \sigma_0)) = k^2 \mu_2;$$

(23)

$$M_3 = a_1^3 + 3a_1\sigma_1^2 = k^3 (\zeta^3(a_0, \sigma_0) + 3\zeta(a_0, \sigma_0)\eta^2(a_0, \sigma_0)) = k^3 \mu_3,$$

а система (20) примет вид

$$\begin{cases} c(1 + eI_1) = 1 \\ \mu_1^{-1} \cdot c(N_1 + eI_2) = k \\ \mu_2^{-1} \cdot c(N_2 + e(1 - d \cdot I_1)) = k^2 \\ \mu_3^{-1} \cdot c(N_3 + e(N_1 - d \cdot I_2)) = k^3 \end{cases}$$

(24)

Выразив из первого уравнения системы (24) параметр  $c$ , преобразуем оставшиеся уравнения системы (24)

$$\begin{cases} \mu_1^{-1} \cdot (1 + eI_1)^{-1} \cdot (N_1 + eI_2) = k \\ \mu_2^{-1} \cdot (1 + eI_1)^{-1} \cdot (N_2 + e(1 - d \cdot I_1)) = k^2 \\ \mu_3^{-1} \cdot (1 + eI_1)^{-1} \cdot (N_3 + e(N_1 - d \cdot I_2)) = k^3 \end{cases} \quad (25)$$

С помощью первого уравнения системы (25) исключаем параметр  $k$ . Получается

$$\begin{cases} (1 + eI_1)(N_2 + e(1 - d \cdot I_1)) = \frac{\mu_2}{\mu_1^2} (N_1 + eI_2)^2 \\ (1 + eI_1)^2 (N_3 + e(N_1 - d \cdot I_2)) = \frac{\mu_3}{\mu_1^3} (N_1 + eI_2)^3 \end{cases} \quad (26)$$

Делим второе уравнение системы (26) на первое и присоединяем первое

$$\begin{cases} (1 + eI_1) \cdot \frac{N_3 + e(N_1 - d \cdot I_2)}{N_2 + e(1 - d \cdot I_1)} = \frac{\mu_3}{\mu_1 \cdot \mu_2} (N_1 + eI_2) \\ (1 + eI_1) \cdot (N_2 + e(1 - d \cdot I_1)) = \frac{\mu_2}{\mu_1} (N_1 + eI_2)^2 \end{cases} \quad (27)$$

Каждое из уравнений системы (27) является квадратным относительно параметра  $e$ , а именно

$$\begin{cases} e^2 \{I_1(N_1 - d \cdot I_2) - \alpha \cdot I_2(1 - d \cdot I_1)\} + e \{I_1 N_3 + N_1 - d \cdot I_2 - \alpha \cdot N_2 \cdot I_2 - \alpha \cdot N_1(1 - d \cdot I_1)\} + \\ + \{N_3 - \alpha N_1 N_2\} = 0 \\ e^2 \{I_1(1 - d \cdot I_1) - \beta \cdot I_2^2\} + e \{I_1 \cdot N_2 + 1 - d \cdot I_1 - 2\beta N_1 \cdot I_2\} + \\ + \{N_2 - \beta N_1^2\} = 0 \end{cases} \quad (28)$$

Здесь для облегчения записи принято

$$\alpha = \frac{\mu_3}{\mu_1 \mu_2}, \quad \beta = \frac{\mu_2}{\mu_1^2} \quad (29)$$

В силу теоремы Виета можно приравнять свободные члены, приведенных к стандартному виду  $e^2 + 2pe + q = 0$ , уравнений системы (28)



$$\frac{N_3 - \alpha N_1 N_2}{I_1 N_1 - \alpha \cdot I_2 - \dots} = \frac{N_2 - \beta N_1^2}{I_1 - \beta \cdot I_2^2 - d I_1^2} \quad (30)$$

Нелинейное относительно единственного оставшегося параметра  $d$  уравнение (30) после элементарных преобразований приобретает вид

$$d \cdot \left\{ (\alpha - 1) + \gamma \frac{I_1}{I_2} \right\} + \gamma \left( \beta \cdot \frac{I_2}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right) + N_1 \frac{1}{I_2} - \alpha \frac{1}{I_1} = 0, \quad (31)$$

где  $\gamma = \frac{N_3 - \alpha N_1 N_2}{N_2 - \beta N_1^2}$ . (322)

Если удастся разрешить нелинейное интегро-функциональное уравнение (31), то параметр  $e$  найдется из любого квадратного уравнения системы (28), в частности, второго

$$e_{1,2} = -p \pm \sqrt{p^2 - q}, \quad p^2 - q \geq 0, \quad (33)$$

где

$$p = \frac{1 + (N_2 - d)I_1 - 2\beta N_1 \cdot I_2}{2(I_1 - d \cdot I_1^2 - \beta \cdot I_2^2)}; \quad q = \frac{N_2 - \beta N_1^2}{I_1 - d \cdot I_1^2 - \beta \cdot I_2^2}.$$

Найденный корень должен удовлетворять неравенству из (12):  $e + d > 0$ . После этого из первого уравнения (24) находится

$$c = (1 + e \cdot I_1)^{-1}, \quad (34)$$

а первое уравнение из (25) определяет

$$k = \mu_1^{-1} \cdot (1 + e \cdot I_1)^{-1} \cdot (N_1 + e \cdot I_2). \quad (35)$$

Заметим в заключение, что в формулы (31-35) входят несобственные интегралы  $I_1$  и  $I_2$ , зависящие от искомого параметра  $d$ .

#### 4. Уравнения метода моментов в сопряженном пространстве

Для подсчета интегралов

$$I_1 = \int_{-x}^{\infty} \frac{1}{x^2 + d} \cdot \frac{e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} dx, \quad I_2 = \int_{-x}^{\infty} \frac{x}{x^2 + d} \cdot \frac{e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} dx, \quad (36)$$

воспользуемся равенством Планшереля [3]

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) \cdot \hat{g}^*(y)dy, \quad (37)$$

где  $\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} \cdot f(x)dx$ ,  $\hat{g}^*(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} g^*(x)dx$ , \* – знак комплексного сопряжения.

Обозначая  $g_1(x)$  и  $g_2(x)$  - рациональные функции, входящие в интегралы  $I_1$  и  $I_2$  соответственно, получим

$$\hat{g}_1^*(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixy}}{x^2 + d} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos xy}{x^2 + d} dx = \frac{\pi}{\sqrt{d}} \cdot e^{-\sqrt{d}|y|}, \quad (38)$$

$$\hat{g}_2^*(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-ix \cdot e^{-ixy}}{x^2 + d} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin xy}{x^2 + d} dx = -i\pi \cdot e^{-\sqrt{d}|y|} \operatorname{sgn} y.$$

Здесь использованы формулы [3] и равенства нулю интегралов от нечетных при  $x \in (-\infty, \infty)$  функций  $\frac{\sin xy}{x^2 + d}$  и  $\frac{x \cos xy}{x^2 + d}$ .

Преобразование Фурье для гауссовского распределения тоже известно

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = e^{iay - \frac{\sigma^2 y^2}{2}}. \quad (39)$$

(см., например, [2]).

Теперь из формул (36 - 39) следует, что

$$I_1 = \frac{1}{2\sqrt{d}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sigma^2 y^2}{2} - \sqrt{d}|y| + iay} dy = \frac{1}{\sqrt{d}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\sigma^2 y^2}{2} - \sqrt{d}y} \cdot \cos ya \cdot dy, \quad (40)$$

$$I_2 = -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sigma^2 y^2}{2} - \sqrt{d}|y| + iay} \operatorname{sgn} y dy = \int_0^{\infty} e^{-\frac{\sigma^2 y^2}{2} - \sqrt{d}y} \cdot \sin ya \cdot dy.$$

Простыми заменами переменных получаются формулы



$$I_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{d}} e^{\alpha^2} \cdot \int_0^{\infty} e^{-(z+\alpha)^2} \cdot \cos \beta z dz, \quad I_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} e^{\alpha^2} \cdot \int_0^{\infty} e^{-(z+\alpha)^2} \cdot \sin \beta z dz,$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{2}\sigma}, \quad \beta = \frac{a\sqrt{2}}{\sigma}. \quad (41)$$

Для того, чтобы определить интегралы, входящие в формулу (41), сначала придется посчитать более простые интегралы

$$J_1 = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cdot \cos \beta x dx; \quad J_2 = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cdot \sin \beta x dx. \quad (42)$$

Рассмотрим по границе полосы  $\Pi = \{[0, +\infty] \times [0, c]\}$  интеграл от аналитической функции комплексного переменного  $Z$

$$\int_{\delta\Pi} e^{-z^2} e^{i\beta z} dz. \quad (43)$$

Это возможно, так как по теореме Коши [4]

$$\int_{\delta\Pi_R} = \int_0^R + \int_{R+i0}^{R+ic} + \int_{R+ic}^{0+ic} + \int_{0+ic}^{0+i0} = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = 0, \quad (44)$$

$\lim_{R \rightarrow \infty} l_2 = 0$  в силу оценки  $|l_2| \leq c_0 e^{-c_1 R^2}$ ;  $c_0, c_1$  - ограниченные положительные константы.

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} l_1 = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos \beta x dx + i \int_0^{\infty} e^{-x^2} \sin \beta x dx;$$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} l_3 = -\int_0^c e^{-x^2+c^2-\beta c} e^{i\alpha(\beta-2c)} dx = -e^{\frac{-\beta^2}{4}} \int_0^c e^{-x^2} dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{-\beta^2}{4}},$$

$$l_4 = -i \int_0^{\frac{\beta}{2}} e^{y^2-\beta y} dy = -ie^{\frac{-\beta^2}{4}} \int_0^{\frac{\beta}{2}} e^{t^2} dt. \quad (45)$$

(Конечно, все эти действия допустимы в силу равномерной сходимости несобственных интегралов из-за присутствия под знаком интегралов множителя  $e^{-x^2}$ ).

Из формул (42 - 45) получаем

$$J_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\beta^2}{4}}, \quad J_2 = e^{-\frac{\beta^2}{4}} \int_0^{\frac{\beta}{2}} e^{t^2} dt. \quad (46)$$

Для того, чтобы воспользоваться полученными формулами, преобразуем интеграл в формуле (41)

$$\begin{aligned} K_1 &= \int_0^{\infty} e^{-(z+\alpha)^2} \cos \beta z dz = \int_{\alpha}^{\infty} e^{-t^2} \cos \beta(t-\alpha) dt = \int_0^{\infty} e^{-t^2} \cos \beta(t-\alpha) dt - \\ &- \int_0^{\alpha} e^{-t^2} \cos \beta(t-\alpha) dt = J_1 \cdot \cos \alpha \beta + J_2 \cdot \sin \alpha \beta - \int_0^{\alpha} e^{-t^2} \cos \beta(t-\alpha) dt = \\ &= e^{-\frac{\beta^2}{4}} \cdot \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cos \alpha \beta + \int_0^{\frac{\beta}{2}} e^{t^2} dt \cdot \sin \alpha \beta \right] - \int_0^{\alpha} e^{-t^2} \cos \beta(t-\alpha) dt; \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} K_2 &= \int_0^{\infty} e^{-(z+\alpha)^2} \sin \beta z dz = \int_{\alpha}^{\infty} e^{-t^2} \sin \beta(t-\alpha) dt = \int_0^{\infty} e^{-t^2} \sin \beta(t-\alpha) dt - \\ &- \int_0^{\alpha} e^{-t^2} \sin \beta(t-\alpha) dt = J_2 \cdot \cos \alpha \beta - J_1 \cdot \sin \alpha \beta - \int_0^{\alpha} e^{-t^2} \sin \beta(t-\alpha) dt = \\ &= e^{-\frac{\beta^2}{4}} \cdot \left[ \int_0^{\frac{\beta}{2}} e^{t^2} dt \cdot \cos \alpha \beta - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sin \alpha \beta \right] - \int_0^{\alpha} e^{-t^2} \sin \beta(t-\alpha) dt. \end{aligned}$$

Теперь формулы (41) примут вид

$$I_1 = \frac{\sqrt{2} e^{\alpha^2}}{\sigma \sqrt{d}} K_1, \quad I_2 = \frac{\sqrt{2} e^{\alpha^2}}{\sigma} K_2, \text{ или, вернувшись к исходным параметрам } a, \sigma, d,$$

$$I_1 = \frac{\sqrt{2} e^{\frac{d}{2\sigma^2}}}{\sigma \sqrt{d}} \left\{ e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} \cdot \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cos \frac{a\sqrt{d}}{\sigma^2} + \sin \frac{a\sqrt{d}}{\sigma^2} \cdot \int_0^{\frac{a}{\sigma\sqrt{2}}} e^{t^2} dt \right] - \right.$$

$$- \int_0^{\frac{\sqrt{d}}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2} \cdot \cos \frac{a\sqrt{2}}{\sigma} \left( t - \frac{\sqrt{d}}{\sigma\sqrt{2}} \right) dt \left. \right\} \quad (48)$$

$$I_2 = \frac{\sqrt{2} e^{\frac{d}{2\sigma^2}}}{\sigma} \left\{ e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} \cdot \left[ -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \sin \frac{a\sqrt{d}}{\sigma^2} + \cos \frac{a\sqrt{d}}{\sigma^2} \cdot \frac{a}{\sigma\sqrt{2}} \int_0^{\frac{a}{\sigma\sqrt{2}}} e^{t^2} dt \right] - \int_0^{\frac{\sqrt{d}}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2} \cdot \sin \frac{a\sqrt{2}}{\sigma} \left( t - \frac{\sqrt{d}}{\sigma\sqrt{2}} \right) dt \right\}$$

**5. Численные эксперименты**

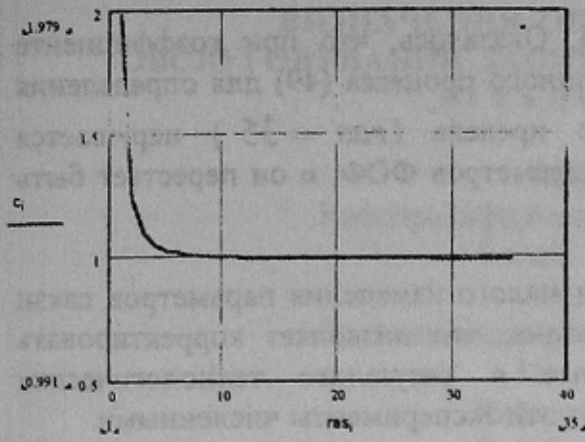
Численные эксперименты проводились на основе данных, полученных при исследовании процессов шлифования ситаллов [5].  
 Определению подлежат четыре параметра  $c, d, e, k$ . Для этого система нелинейных уравнений (20) была сведена к одному нелинейному интегро-функциональному уравнению (31) относительно параметра  $d$ , которое удалось решить методом последовательных приближений:

$$d_k = \frac{\gamma(d_{k-1}) \left( \beta \frac{I_2(d_{k-1})}{I_1(d_{k-1}) - I_2(d_{k-1})} - \frac{1}{I_2(d_{k-1})} \right) + \frac{N_1}{I_2(d_{k-1})} - \frac{\alpha}{I_1(d_{k-1})}}{(\alpha - 1) + \gamma(d_{k-1}) \frac{I_1(d_{k-1})}{I_2(d_{k-1})}} \quad (49)$$

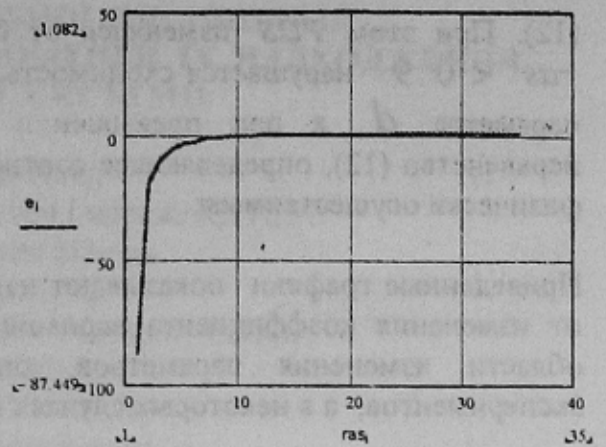
$k = 1, 2, \dots, n.$

Оценка скорости сходимости или проверка существования неподвижной точки для оператора, задаваемого правой частью (49), не проводились. Однако, с помощью численных экспериментов установлено, что для обеспечения сходимости достаточно всего трех итераций.  
 Результаты численных оценок параметров связи, полученных с помощью математического пакета MathCAD 8.0, приведены на рис. 1 в виде зависимостей искомых параметров от величины  $ras = \frac{a}{\sigma}$ , обратной коэффициенту вариации рассеивания для входного процесса.  
 В процессе численных экспериментов установлена допустимая область существования линейного ФОФ (12). Границы этой области определялись нарушением неравенства

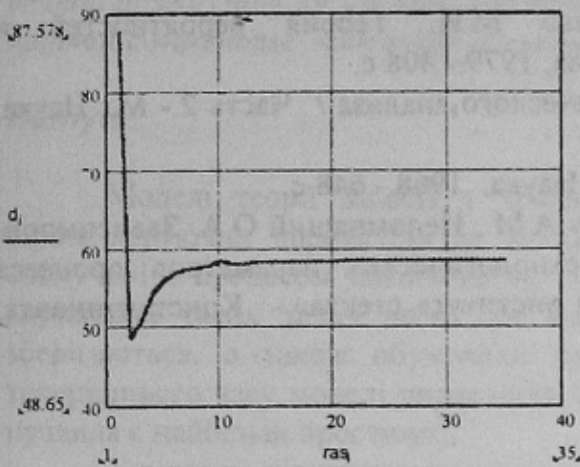




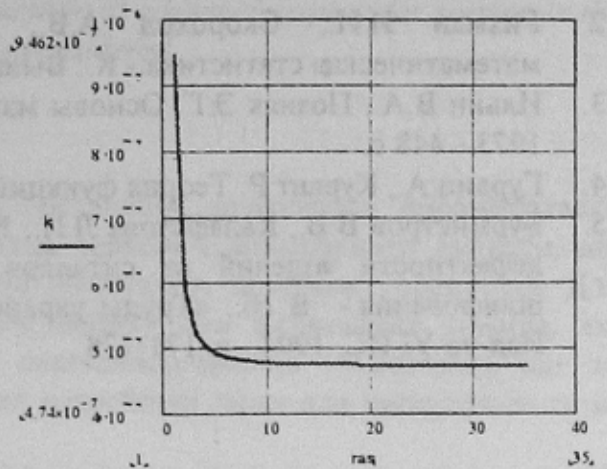
a)



b)



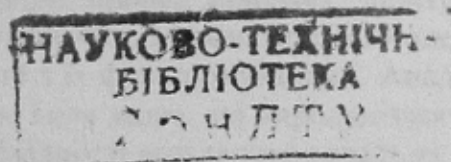
c)



d)

Рис. 1. Зависимости параметров связи от коэффициента вариации рассеивания

- a) зависимость параметра  $c$ ,
- b) зависимость параметра  $e$ ,
- c) зависимость параметра  $d$ ,
- d) зависимость параметра  $k$ .



(12). При этом  $ras$  изменялся от 0.9 до 35. Оказалось, что при коэффициенте  $ras < 0.9$  нарушается сходимость итерационного процесса (49) для определения параметра  $d$ , а при превышении верхнего предела ( $ras = 35$ ) нарушается неравенство (12), определяющее соотношение параметров ФОФ, и он перестает быть физически осуществимым.

Приведенные графики показывают наличие зон малого изменения параметров связи от изменения коэффициента вариации рассеивания, что позволяет корректировать области изменения параметров, определенные в результате технологических экспериментов, а в некоторых случаях и заменить эти эксперименты численными.

### Литература

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей.- М.: Наука, 1964.- 576 с.
2. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика.- К.: Выща школа, 1979.- 408 с.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа / Часть 2.- М.: Наука, 1973.- 448 с.
4. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций.- М.: Наука, 1968.- 648 с.
5. Бурмистров В.В., Калафатова Л.П., Райхель А.М., Непомнящий О.А. Зависимость дефектности изделий из ситаллов от технологических параметров процесса шлифования.- В сб.: «Труды украинского института стекла».- Константиновка, Изд-во УГИС, 1994.- с. 171-178.