УДК 515.2

ПОВЕРХНІ В ОРТОГОНАЛЬНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ, ПОБУДОВАНІЙ НА ОСНОВІ СПРЯЖЕНИХ ПУЧКІВ КІЛ

Стребіж Н.В., аспірантка*
Донецький національний технічний університет
Тел.: (062) 338-48-85

Анотація – **отримано нове параметричне представлення триортогональної системи поверхонь на основі спряжених пучків кіл і показано його застосування для подання циклічних поверхонь, віднесених до ліній кривини.**

Ключові слова – **триортогональна система, пучок кіл, ортогональні координати, візуалізація, внутрішнє рівняння.**

Постановка проблеми. В теорії оболонок і практиці їх розрахунку на міцність важливою передумовою є таке її аналітичне представлення, при якому серединна поверхня віднесена до ліній кривини, а краї збігаються з координатними лініями. Для первинної оцінки міцності конструкції та її естетичної виразливості бажано мати багатоваріантну аналітичну модель, засоби варіювання її формою, а також можливість використання програм комп’ютерної графіки для візуалізації варіантів з метою остаточного вибору.

Аналіз останніх досліджень. В роботі [1] було запропоновано конструювання циклічних поверхонь проекціюванням деякої лінії колами конгруенції, отриманої обертанням пучка кіл навколо їх спільної радикальної осі. Параметричні рівняння конгруенції кіл

$$\begin{aligned} x &= \left(a - \frac{1}{2u} + \sqrt{\left(a - \frac{1}{2u} \right)^2 - a^2 + r^2}\, \cos t \right) \cos v, \\ y &= \left(a - \frac{1}{2u} + \sqrt{\left(a - \frac{1}{2u} \right)^2 - a^2 + r^2}\, \cos t \right) \sin v, \\ z &= \sqrt{\left(a - \frac{1}{2u} \right)^2 - a^2 + r^2}\, \sin t, \end{aligned} \qquad (1)$$

де a, r – абсциса центра і радіус кола, зв’язані залежністю при $c=const$:

---

* Науковий керівник – д.т.н., професор Скідан І.А.

$$r^2 - a^2 = c^2 -\quad \text{для еліптичного пучка кіл;}$$
$$a^2 - r^2 = c^2 - \text{для гіперболічного пучка кіл;} \tag{2}$$
$$a^2 - r^2 = 0 -\quad \text{для параболічного пучка кіл;}$$

t – параметр положення точки на колі конгруенції,
v – параметр положення площини кола в пучку з віссю *Oz*.

В роботі [2] складено параметричні рівняння ортогональних траєкторій сім'ї сфер з центрами на прямій (осі *Oz*) у вигляді:

$$x = \frac{2r\,wE}{w^2 + E^2}\cos t,\; y = \frac{2r\,wE}{w^2 + E^2}\sin t,\; z = b + r\frac{w^2 - E^2}{w^2 + E^2}, \tag{3}$$

де *b=b(u), r=r(u)* – апліката і радіус сфери як довільні функції від параметра *u*,

$$E = \exp\int \frac{b'}{r}\,du, \tag{4}$$

t – параметр площини в пучку з віссю *Oz* ,

w – параметр, що визначає єдину траєкторію в площині пучка.

В роботі [3] введено триортогональну систему поверхонь, утворену обертанням навколо осі *Oz* двох спряжених пучків кіл, що характеризуються спільним значенням *c*. Пучок кіл з центрами на осі *Oz* утворює сім'ю (пучок) сфер, пучок кіл з центрами на осі *Ox* утворює сім'ю торових поверхонь і третю сім'ю складають площини пучка з віссю *Oz*.

Систему введено функціями

$$x = \frac{\sqrt{v^2 + c^2}\,u^2 \pm \sqrt{u^2 - c^2}\,u\,v}{u^2 + v^2}\cos t,$$
$$y = \frac{\sqrt{v^2 + c^2}\,u^2 \pm \sqrt{u^2 - c^2}\,u\,v}{u^2 + v^2}\sin t, \tag{5}$$
$$z = \frac{v^2\sqrt{u^2 - c^2} \pm \sqrt{v^2 + c^2}\,u\,v}{u^2 + v^2},$$

де *u* – радіус кола еліптичного пучка кіл (після обертання - сфер) з центрами на осі *Oz*,

v – радіус кола гіперболічного пучка кіл (після обертання – меридіану тора),

c – довільна стала,

t – параметр площини у пучку з віссю *Oz*.

Аналогічні вирази наведено для випадків:

- коли еліптичний та гіперболічний пучки змінюються місцями;
- коли за параметри приймаються не радіуси, а апліката та абсциса центрів кіл, що належать спряженим пучкам.

Формулювання цілей статті (постановка завдання). В статті поставлено за ціль дослідити геометричну модель визначення ортогональних траєкторій довільної сім'ї сфер з центрами на прямій для частинного випадку, коли сім'єю сфер є пучок, а ортогональними траєкторіями – конгруенція кіл зі спільною радикальною віссю, виявити геометричну сутність параметра E, що входить до функцій (3), а також застосувати модифіковані функції (3) для конструювання поверхонь, *a priori* віднесених до ліній кривини .

Основна частина. У випадку, коли обидва спряжені пучки параболічні, c=0 і функції (5) набувають вигляду

$$x=\frac{2vu^2}{u^2+v^2}\cos t,\ y=\frac{2vu^2}{u^2+v^2}\sin t,\ z=\frac{2v^2u}{u^2+v^2}. \tag{6}$$

Функції (6) отримані з врахуванням тільки знаку " + ", оскільки кола параболічних спряжених пучків перетинаються під прямим кутом в двох точках, одна з яких є початком координат, що відповідає знаку " - ", коли всі координати x, y, z за формулами (5) дорівнюватимуть нулеві.

Повернемось до функцій (3), (4). Згідно з (2) і (4) для параболічних пучків c =0, $b=r=u$ і $E=e^{\int\frac{b'}{r}du}=e^{\int\frac{1}{u}du}=u$.

Підставимо $b=u$, $r=u$, $E=u$ до (3). Отримаємо:

$$x=\frac{2wu^2}{w^2+u^2}\cos t,\ y=\frac{2wu^2}{w^2+u^2}\sin t,\ z=\frac{2uw^2}{w^2+u^2}. \tag{7}$$

Порівняємо (6) і (7) і заключаємо, що w в формулах (7) відіграє роль змінного радіуса кіл з центрами на прямій в горизонтальній площині, що проходить через початок координат. Ці кола є ортогональними траєкторіями пучка сфер з центрами на осі Oz, які дотикаються площини xOy в початку координат.

Повернемось до випадків, коли пучок кіл з центрами на осі Oz, що утворює пучок сфер в результаті обертання, еліптичний чи гіперболічний. В цих випадках, якщо $r=u$, то згідно з (2) $b=\sqrt{r^2\pm c^2}=\sqrt{u^2\pm c^2}$, де c – стала, знак " + " для гіперболічного пучка, знак " - " для еліптичного. За формулою (4)

$$E=e^{\int\frac{b'}{r}du}=e^{\int\frac{du}{\sqrt{u^2\pm c^2}}}=e^{\ln\left|u+\sqrt{u^2\pm c^2}\right|}=u+\sqrt{u^2\pm c^2}=r+b$$

Підстановка виразу E до (3) приводить до

$$x=\frac{2r\,w(r+b)}{w^2+(r+b)^2}\cos t,\ y=\frac{2r\,w(r+b)}{w^2+(r+b)^2}\sin t,\ z=b+r\frac{w^2-(r+b)^2}{w^2+(r+b)^2}, \tag{8}$$

де $r=u,\ b=\sqrt{u^2\pm c^2},\ c=const.$

Функції (8) визначають триортогональну систему поверхонь: $u=const$ – пучок сфер зі спільною радикальною площиною xOy, w = $const$ – сім'я торових поверхонь, $t=const$ – сім'я площин. Цими ж функціями вводять ортогональну систему координат t, u, w.

Оскільки в ортогональну систему координат входять сім'я сфер *u=const* і сім'я площин *t=const*, що належать пучку з віссю *Oz*, подання будь-якої лінії внутрішнім рівнянням

$$w = w(t) \qquad (9)$$

після підстановки його у рівняння (8) при сталому значенні *u* виражають лінію на сфері, при змінному – циклічну поверхню Іоахімсталя, координатними лініями якої є кола і сферичні криві. Поверхня віднесена до ліній кривини.

Наведемо приклади.

Перші два приклади стосуються триортогональної системи (8), в яку входить еліптична сім'я сфер, що подається двома функціями:

$$r = u,\ b = \sqrt{u^2 - c^2}.$$

Поверхня $w = at + d$ показана на рис. 1 при $c = 0.2,\ a = 1,\ d = 1,$ $0 \le u \le 3,\ 0 \le t \le 2\pi$.

Поверхня $w = a\cos(nt) + s$ показана на рис. 2 при $c = 1,\ a = 1, n = 3,\ s = 1.2,\ 1.5 \le u \le 3,\ 0 \le t \le 2\pi$.

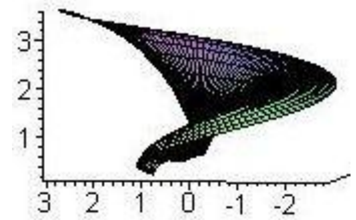

Рис.1

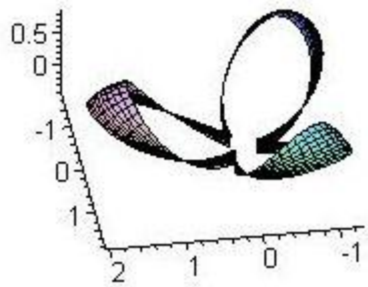

Рис. 2

Наступні два приклади стосуються триортогональної системи (8), в яку входить гіперболічна сім'я сфер, що подається двома функціями:

$$r = u,\ b = \sqrt{u^2 + c^2}.$$

Поверхня $w = \sqrt{a^2 + t^2}$ показана на рис. 3 при $c = 0.5,\ a = 10,\ s = 1.2,\ 1 \le u \le 3,\ 0 \le t \le 2\pi.$

Поверхня $w = a\cos(nt) + s$ показана на рис. 4 при $c = 1,\ a = 1,\ n = 3,\ s = 1.2,\ 1.5 \le u \le 3,\ 0 \le t \le 2\pi.$

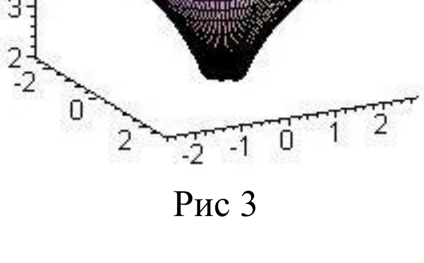

Рис 3

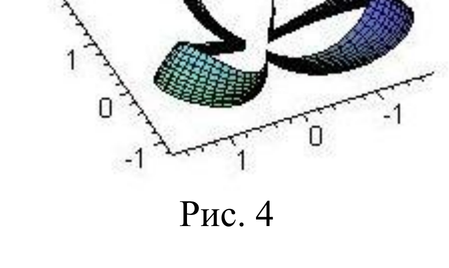

Рис. 4

Поверхні $w = \sqrt{a^2 - t^2}$ та $w = a\cos(nt) + s$ показані відповідно на рис. 5 і 6. Пучок сфер параболічний. Вихідні дані для отримання зображення поверхні рис. 5: $c = 0,\ a = 10,\ s = 1.2,\ 1 \le u \le 3,\ 0 \le t \le 2\pi$ і поверхні 6: $c = 0,\ a = 1,\ n = 3,\ s = 1.2,\ 1 \le u \le 3,\ 0 \le t \le 2\pi.$

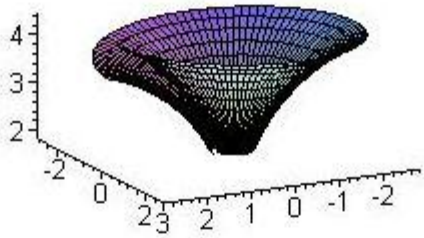

Рис. 5

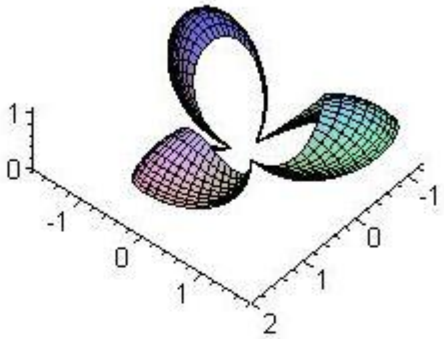

Рис. 6

Висновки. В статті доведено достовірність функцій введення двох ортогональних систем координат: системи (3), (4) і системи (5). Якщо система введена на основі обертання двох спряжених пучків кіл і в якості параметрів прийняті функції $r = u,\ b = \sqrt{u^2 \pm c^2},$ де знак “ + ” для гіперболічного пучка, знак “ - ” для еліптичного пучка сфер, $c = 0$ - для параболічного, з іншого боку, якщо за параметри прийняті $b = u,\ r = \sqrt{u^2 \pm c^2}$ не становить труднощів довести, що вираз E згідно з (4) лишається незмінним і дорівнює $E = u + \sqrt{u^2 \pm c^2} = b + r.$

Нова параметризація ортогональної системи, введеної на основі спряжених пучків кіл, відкриває нові можливості конструювати поверхні Іоахімсталя з однією сім’єю координатних ліній – кіл, і з іншою – сферичних ліній, які є для поверхні лініями кривини.

Література.

1. *Сименко О.В.* Аналітичні та комп’ютерно-графічні моделі нетрадиційних систем проекціювання та їхніх проекціювальних поверхонь: дис…канд. техн. наук: 05.01.01./ О.В. Сименко.- Донецьк, 2006. – 216 с.
2. *Фролов О.В.* Віднесення поверхонь до ліній кривини стосовно проектування оболонок: дис…канд. техн. наук: 05.01.01./ О.В. Фролов.- Донецьк, 2005. – 245 с.
3. *Лихачова В.В.* Формоутворення триортогональних систем поверхонь і відповідних координатних систем: дис. … канд. техн. наук: 05.01.01 / В.В. Лихачова. – Донецьк, 2010. – 210с.

ПОВЕРХНОСТИ В ОРТОГОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ, ПОСТРОЕННОЙ НА ОСНОВЕ СОПРЯЖЕННЫХ ПУЧКОВ ОКРУЖНОСТЕЙ

Стребиж Н.В.

Аннотация

Получено новое параметрическое представление триортогональной системы поверхностей на основе сопряженных пучков окружностей и показано его применение для задания циклических поверхностей, отнесенных к линиям кривизны.

SURFACES IN ORTHOGONAL COORDINATES BASED ON CONJUGATED PENCILS OR CIRCLES

N.Strebizsh

Summary

New parametric representation of tryorthogonal system of surfaces based on conjugated pencils or circles is received. Its application for giving of cyclic surfaces in curvature lines is demonstrated.