УДК 515.2

# ПОВЕРХНІ ЗА НАПЕРЕД ПОДАНИМИ УМОВАМИ В СПЕЦІАЛЬНИХ КООРДИНАЦІЯХ ПРОСТОРУ

Скідан І.А., д.т.н.
Стребіж Н.В., аспірантка*
*Донецький національний технічний університет*
Тел.: (062) 338-48-85

***Анотація*** – **пропонується спеціальна координація простору, яка частково враховує вимоги до поверхні, що конструюється. Таким вимогам відповідає у просторі клас поверхонь. За допоміжною умовою з класу виділяється шукана поверхня.**

***Ключові слова*** – **конгруенція, лінія сім'ї, координація, координатна лінія, інцидентність, параметричні рівняння.**

*Постановка проблеми.* Розробка методології аналітичного представлення поверхонь складної геометричної форми, відповідного вхідним даним комп'ютерної візуалізації, становить проблему, що суттєво впливає на розвиток автоматизованих систем наукових досліджень (АСНД), проектування (САПР), технологічної підготовки виробництва (АС ТПВ).

*Аналіз останніх досліджень.* Робота базується на результатах наукових досліджень [1, 2], в яких переконливо доведено, що вибір системи віднесення "під об'єкт" значно спрощує як первинне аналітичне його представлення, так і розв'язання з ним поставлених задач.

*Формулювання цілей статті (постановка завдання).* В статті досліджуються засоби керування формоутворенням поверхонь умовою їх проходження через подану лінію при забезпеченні комп'ютерного відображення такої координатної сітки, одна сім'я ліній якої характеризує клас поверхні (лінійчата, циклічна, гвинтова і т. і.)

*Основна частина.* Відомо, що система спеціальних координат $u$, $v$, $w$ подається функціями.

$$x = f(u,v,w), y = \varphi(u,v,w), z = \psi(u,v,w), \tag{1}$$

що називають функціями введення спеціальних координат. В області

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \neq 0 \tag{2}$$

функції (1) можна розв'язати відносно $u$, $v$, $w$.

---

* Науковий керівник – Скідан І.А.

З умови (2) при заміні нерівності на рівність можна отримати рівняння фігур, в точках яких отримати розв'язки неможливо. Якщо цією фігурою є поверхня, то вона обмежує область неможливих розв'язків, яку називають карстовою.

Координатна система (1) має три сім'ї координатних поверхонь $u$=const, $v$=const, $w$=const, параметричні рівняння представника яких отримуємо підстановкою сталого значення відповідної змінної $u$, або $v$, або $w$ до функцій (1). Вона має також три конгруенції координатних ліній: $u$-ліній в перетині координатних поверхонь $v$=const і $w$=const, $v$-ліній в перетині координатних поверхонь $u$=const і $w$=const , $w$-ліній в перетині координатних поверхонь $u$=const і $v$=const.

Рівняння однієї з ліній однієї з трьох конгруенцій координатних ліній отримуємо підстановкою в (1) сталих значень відповідної пари координатних поверхонь, які в перетині визначають відповідну координатну лінію.

Якщо функції (1) подані, то координатні поверхні і координатні лінії досліджуються аналітичним методом, оскільки їхні параметричні рівняння отримують безпосередньою підстановкою сталого значення однієї змінної у випадку координатної поверхні, або двох змінних у випадку координатних ліній до виразів (1).

Умова (2) при заміні нерівності на рівність виражає фокальні фігури усіх трьох конгруенцій координатних ліній. Спочатку знаходимо їхні внутрішні рівняння (у змінних $u$, $v$, $w$), а потім параметричні рівняння у змінних $x$, $y$, $z$ підстановкою внутрішнього рівняння до виразів (1).

В прикладній геометрії конгруенцію ліній подають не аналітично функціями (1), а її фокальними фігурами $\Phi_i$: точками, лініями, поверхнями. Таким чином забезпечується умова проходження ліній конгруенції через подані фокальні лінії або точки, або ж умова дотику поданої фокальної поверхні. Клас поверхонь конгруенції характеризується тим, що будь-яка поверхня цього класу проходить через подані фокальні лінії (точки) або дотикається фокальних поверхонь.

Зануренням ще однієї лінії $m$ в конгруенцію ліній $l$ визначають (виділяють) конкретну поверхню класу. Якщо лінія $l$ конгруенції і фокальні фігури $\Phi_i$ конгруенції алгебраїчні, конгруенцію називають алгебраїчною. Алгебраїчною буде і поверхня конгруенції, вилучена з неї зануренням алгебраїчної лінії $l$.

Алгебраїчний підхід до дослідження конгруенцій ліній є предметом вивчення алгебраїчної геометрії, конструктивний підхід – предмет вивчення синтетичної геометрії.

Щодо прикладної геометрії їй цікава не тільки форма поверхні, але й спосіб її представлення. Наприклад, автоматизовані системи наукових досліджень, проектування і технологічної підготовки виробництва потребують комп’ютерної візуалізації поверхні, розрахунок поверхні оболонки потребує її віднесення до ліній кривини. Задовольнити першій вимозі можна представленням поверхні параметричними рівняннями. Саме на такий спосіб представлення орієнтовані сучасні пакети комп’ютерної графіки. Задовільнення другої вимоги зв’язано з переходом від довільної координатної сітки на поверхні до координатної сітки з ліній кривини. Такий перехід не завжди можливо здійснити у кінцевій формі, тому постає проблема виявлення ресурсів формоутворення на основі апріорного віднесення поверхні до ліній кривини.

Таким чином, дослідженню підлягають шляхи розв’язання двох задач:

- за умов проходження через подані лінії поверхні, що несе на собі сім’ю наперед визначених ліній, скласти параметричні рівняння цієї поверхні;
- скласти параметричні рівняння поверхні в лініях кривини, виявивши умови і ступінь довільності її подання.

Складемо алгоритм розв’язання першої із задач у загальній постановці: скласти параметричні рівняння лінійчатої поверхні, яка проходить через три лінії:

$$x = f_1(u),\ y = \varphi_1(u),\ z = \psi_1(u), \tag{3}$$

$$x = f_2(v),\ y = \varphi_2(v),\ z = \psi_2(v), \tag{4}$$

$$x = f_3(t),\ y = \varphi_3(t),\ z = \psi_3(t), \tag{5}$$

Параметри шуканих рівнянь мусять бути такими, щоб у координатну сітку входила сім’я прямих.

*Алгоритм розв’язання.* 1). Параметричні рівняння у вигляді (1) конгруенції прямих, для якої лінії (3), (4) є фокальними:

$$x = f_1(u)(1-w) + f_2(v)w,\ y = \varphi_1(u)(1-w) + \varphi_2(v)w,\ z = \psi_1(u)(1-w) + \psi_2(v)w. \tag{6}$$

Геометрична сутність параметра $w$, що входить до рівнянь (6) $w = \frac{AM}{AB}$, де $A$ – точка на лінії (3), $B$ – точка на лінії (4), $M$ – поточна точка на прямій $AB$.

Уявляючи (6) функціями введення спеціальної системи координат, визначимо координатні поверхні і координатні лінії цієї системи:

координатні поверхні $u$=const – лінійчаті поверхні, що несуть на собі сім’ю прямих і сім’ю ліній, подібних лінії (4) з коефіцієнтом подібності $w$ і центрами подібності на лінії (3);

координатні поверхні $v$=const – лінійчаті поверхні, що несуть на собі сім’ю прямих і сім’ю ліній, подібних лінії (3) з коефіцієнтом подібності (1-$w$) і центрами подібності на лінії (4);

координатні поверхні $w$=const – поверхні перенесення, що несуть на собі сім'ю ліній, подібних лінії (3) з центрами подібності на лінії (4), і сім'ю ліній, подібних лінії (4) з центрами подібності на лінії (3). Лінії обох сімей мають фіксований коефіцієнт подібності $w$.

Конгруенція $w$- ліній – прямі, що перетинають лінії (3) і (4).

Конгруенція $v$- ліній – лінії, подібні лінії (3) з центрами подібності на лінії (4) і коефіцієнтом подібності (1- $w$).

Конгруенція $u$- ліній – лінії, подібні лінії (4) з центрами подібності на лінії (3) і коефіцієнтом подібності $w$.

Якщо лінії (3) і (4) плоскі, координатні поверхні перенесення $w$=const вироджуються у площини, які разом з площинами інциденції (3) і (4) належать спільному пучку.

2). В області, яка визначається з умови (2), розв'язуємо систему рівнянь (6) відносно $u$, $v$, $w$, тобто, знаходимо функції перетворення прямокутних декартових координат $x$, $y$, $z$ у спеціальні координати $u$, $v$, $w$:

$$u = u(x, y, z),\ v = v(x, y, z),\ w = w(x, y, z), \tag{7}$$

Функції (7) дозволяють визначати координати $u_{M,} v_{M,} w_M$ довільної точки $M$ за її прямокутними декартовими координатами $x_{M,} y_{M,} z_M$ .

Шукану поверхню отримаємо вилученням з конгруенції (6) шляхом занурення в неї лінії (5).

3). Примусимо точку $M$ рухатись по лінії (5). Оскільки у параметричних рівняннях (6) конгруенції прямих $u$ і $v$ – параметри положення прямої, $w$ – параметр положення точки на прямій, підставимо до перших двох виразів (7) замість $x$, $y$, $z$ праві частини рівнянь (5), а потім в рівняннях (6) замінимо $u$ і $v$ на отримані вирази. Одержимо параметричні рівняння шуканої лінійчатої поверхні у вигляді

$$x = x(t, w),\ y = y(t, w),\ z = z(t, w). \tag{8}$$

Координатну сітку поверхні (8) складають сім'я прямолінійних твірних $t$=const і сім'я ліній, до якої входить лінія (4).

Надамо загальному викладенню конкретного змісту. Нехай роль лінії (3) відіграє пряма, яку сумістимо з віссю $oz$

$$x = f_1(u) = 0,\ y = \varphi_1(u) = 0,\ z = \psi_1(u) = u, \tag{9}$$

роль лінії (4) відіграє коло радіуса $r$ в площині $z$=$z_0$

$$x = f_2(v) = r\cos v,\ y = \varphi_2(v) = r\sin v,\ z = \psi_2(v) = z_0, \tag{10}$$

роль лінії (5) відіграє епіциклоїда

$$x = f_3(t) = 4\cos t - \cos 4t,\ y = \varphi_3(t) = 4\sin t - \sin 4t,\ z = \psi_3(t) = 0. \tag{11}$$

Параметричні рівняння (6) конгруенції прямих, для якої пряма (9) і коло (10) є фокальними лініями

$$x = wr\cos v,\ y = wr\sin v,\ z = u(1 - w) + z_0 w. \tag{12}$$

З перших двох рівнянь (12)

$$w = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r},\ \sin v = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \cos v = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \tag{13}$$

з третього з рівнянь (12)

$$u = \frac{r\,z - z_0\sqrt{x^2 + y^2}}{r - \sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{14}$$

Підставимо до параметричних рівнянь конгруенції (12) замість $u, \sin v, \cos v$ їхні вирази з (14), (13), замінивши в них *x, y, z* на праві частини (11):

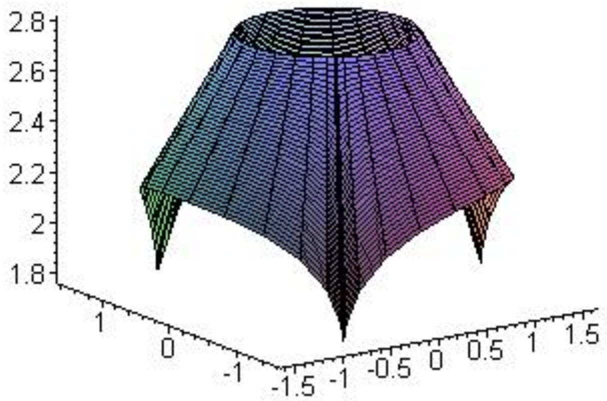
$$x = wr\frac{f_3(t)}{\sqrt{f_3^2(t)+\varphi_3^2(t)}},\ y = wr\frac{\varphi_3(t)}{\sqrt{f_3^2(t)+\varphi_3^2(t)}},$$

(15)

$$z = \frac{r\psi_3(t) - z_0\sqrt{f_3^2(t)+\varphi_3^2(t)}}{r - \sqrt{f_3^2(t)+\varphi_3^2(t)}}(1-w) + z_0 w,$$

параметричні рівняння шуканої поверхні.

На рисунку представлено поверхню (15), побудовану при $r = 0.8,\ z_0 = 2.8,\ 0 \le t \le 2\pi,\ 1 \le w \le 2$ .




*Висновки.* Запропонований метод складання параметричних рівнянь спочатку конгруенції ліній, а потім виділення з неї лінійного каркасу поверхні зануренням лінії, дозволяє отримати загальні параметричні рівняння класу поверхонь, що характеризується типом ліній каркасу. Варіацію форми поверхні – представника класу здійснюють вибором лінії, яка занурюється в конгруенцію. Аналітична модель поверхні спряжена зі структурою вхідних даних програмних засобів візуалізації поверхонь і отримується підстановкою правих частин параметричних рівнянь лінії, що занурюється в конгруенцію, до параметричних рівнянь останньої.

Література.
1. *Скидан И.А.* Геометрическое моделирование кинематических поверхностей в специальных: дис…доктора техн. наук. 05.01.01./ И.А. Скидан.- М.: 1989. – 340 с.
2. *Скідан І.А.* Загальна аналітична теорія прикладного формоутворення на основі глобальної параметризації / І.А. Скідан // Прикладна геометрія та інженерна графіка: праці / Таврійська державна агротехнічна академія.- Мелітополь; 2001.- Вип.4, Т.13.- с. 21-28.

## ПОВЕРХНОСТИ ПО НАПЕРЕД ЗАДАННЫМ УСЛОВИЯМ В СПЕЦИАЛЬНЫХ КООРДИНАЦИЯХ ПРОСТРАНСТВА

Скидан И.А., Стребиж Н.В.

**Аннотация**

**Предлагается специальная координация пространства, которая частично учитывает требования к поверхности. Таким требованиям удовлетворяет класс поверхностей. По дополнительному требованию из класса выделяется искомая поверхность.**

## SURFACES SATISFIED ANY DEMANDS IN SPECIAL SPATIAL COORDINATES

I. Skidan, N.Strebizsh

**Summary**

**Mode of representation of congruence structure of which accounts partially any properties of required surface is proposed. Parametric equations of a surface are obtained by substitution of a right parties parametric equations of a line which is embedded in the congruence.**