

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА СБОРКИ ИЗДЕЛИЙ

Джерби Мохамед Шамседдин

Донецкий государственный технический университет

кафедра АСУ

Email: jmctn@yahoo.com

### Abstract

*Shamseddin D. In the article the process of assembly of an item on an assembly line from ready details and nodes acting (arriving) from the technological paths is considered and as the mathematical model of the process of assembly of an item is resulted which completely describes operation of an assembly line*

Процесс сборки изделия является завершающим этапом всего производственного процесса, имеющего целью получение готовой продукции. Сборка изделия осуществляется на сборочном конвейере из готовых деталей и сборочных единиц, поступающих с технологических маршрутов. Сборочный конвейер является выходным звеном в последовательности поточных линий и цехов, участвующих в изготовлении изделия. Он состоит, в общем случае, из  $n$  позиций, на которых происходит установка соответствующих сборочных единиц и деталей [1].

Сборочный конвейер схематически представлен на рис.1а, где  $Y_i(t)$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) - выходы соответствующих технологических маршрутов, поставляющих детали и сборочные единицы на позиции сборочного конвейера;

$Z(t)$  - выход сборочного конвейера, представляющий собой изделие, готовое к отправке его потребителям.

Темп протекания процесса сборки изделия характеризуется величиной такта сборки  $t$ , т.е. интервалом времени, через который с конвейера сходит готовое изделие и происходит переход собираемых изделий с позиции на позицию. Условием нормальной работы сборочного конвейера является

наличие деталей и сборочных единиц на соответствующих позициях в любой момент времени  $t$ . Это накладывает определенные ограничения на производственные процессы технологических маршрутов, обеспечивающие комплектацию сборки. Темпы производства комплектующих деталей и узлов  $Y_i(t)$  на технологических маршрутах должны быть не ниже темпа сборки изделия  $Z(t)$ . Для реальных производственных процессов это условие не всегда выполняется, однако даже если оно и выполняется, стохастическая природа процесса производства не позволяет равномерно обеспечивать позиции сборочного конвейера комплектующими деталями и сборочными единицами в течение рабочей смены.

С целью повышения ритмичности работы сборочного конвейера на каждой позиции имеется страховой задел деталей  $W_i(t)$ . Наличие этого задела позволяет снижать простои сборки из-за неравномерного снабжения конвейера технологическими маршрутами. Величина  $W_i(t)$  для каждой позиции различна и зависит от уровня рассогласованности работы сборочного конвейера и данного технологического маршрута [2].

Пусть переменные  $Y_i(t)$  и  $W_i(t)$  принимают значения единица или нуль в зависимости от наличия или отсутствия деталей и узлов на  $i$ -ой позиции в момент времени  $t$ . Переменная принимает значение 1, когда происходит процесс сборки и с конвейера сходит готовое изделие и значение 0 когда сборочный конвейер стоит.

Тогда для произвольного момента времени  $t$  процесс сборки изделия описывается следующим уравнением :

$$Z(t+T) = (Y_1(t) \vee W_1(t)) \wedge (Y_2(t) \vee W_2(t)) \wedge \dots \wedge (Y_n(t) \vee W_n(t)), \quad (1)$$

где  $T$  - такт сборки;

$\vee$  - операция логического сложения "или";

$\wedge$  - операция логического умножения "и" :

$$Y_i(t) = W_i(t) = \begin{cases} 1 - \text{если деталь есть на } i\text{-й позиции;} \\ 0 - \text{если деталь на } i\text{-й позиции нет;} \end{cases}$$



$$Z(t+T) = \begin{cases} 1 - \text{конвейер работает;} \\ 0 - \text{конвейер стоит.} \end{cases}$$

Уравнение (1) связывает выход сборочного конвейера в момент  $t+T$  с выходами технологических маршрутов и величинами страховых заделов в момент времени  $t$ .

Полученная математическая модель процесса сборки изделия полностью описывает работу сборочного конвейера внутри каждого такта  $[t+T]$  при этом необходимо знать состояние выходов технологических маршрутов и страховых заделов на каждой позиции в конце предыдущего такта работы, т.е., в момент времени  $t$ . При изучении работы сборочного конвейера на достаточно больших интервалах времени: (смена; сутки, декада и т.д.) полученная модель (1) не используется, так как она описывает процесс сборки внутри каждого такта.

Представим на рис.1.б, сборочный конвейер в виде объекта, имеющего  $n$  входов и один выход, с состоянием определенным  $n$ -величинами страховых заделов.

Пусть  $Y_1(t), Y_2(t) \dots Y_n(t), W_1(t), W_2(t) \dots W_n(t), Z(t)$  являются стационарными нормальными случайными функциями. Тогда математическое ожидание выходной величины  $Z(t)$  относительно входных значений  $Y_i(t)$  и состояний страховых заделов  $W_i(t)$  будет определяться уравнением регрессии:

$$M\{Z(t) / Y_1(t), Y_2(t) \dots Y_n(t), W_1(t), W_2(t) \dots W_n(t)\} = B_0(t) + \sum C_i(t) Y_i(t) + \sum P_i(t) W_i(t), \quad (2)$$

где  $B_0(t), C_i(t), P_i(t)$  коэффициенты множественной регрессии.

Уравнение (2) характеризует связь между всеми рассматриваемыми переменными  $Y_1(t), Y_2(t) \dots Y_n(t), W_1(t), W_2(t) \dots W_n(t)$  и выходной переменной  $Z(t)$ . Коэффициенты множественной регрессии  $B_0(t), C_i(t), P_i(t)$  являются весовыми коэффициентами, учитывающими степень влияния каждого из  $Y_i(t)$  и  $W_i(t)$  на выходную переменную  $Z(t)$ .

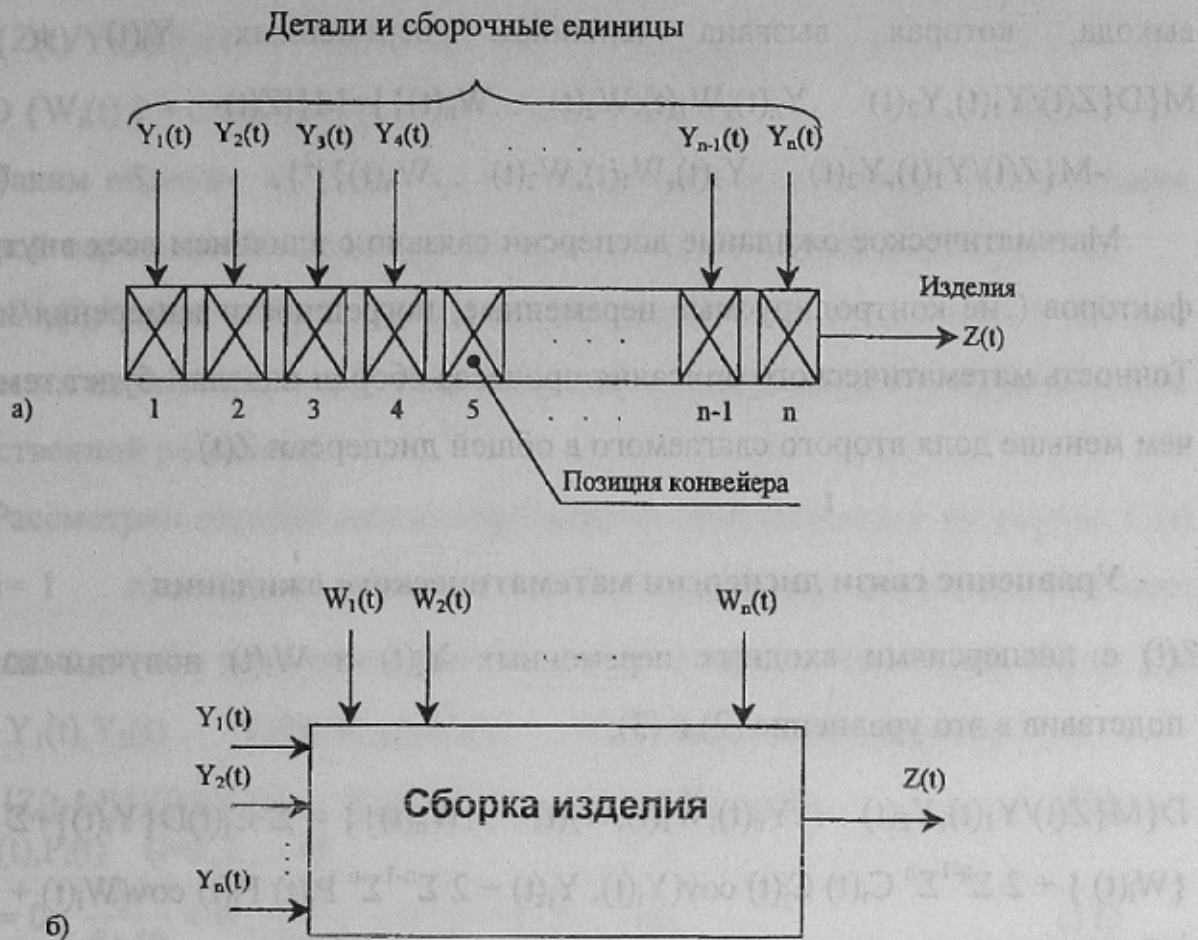


Рисунок 1 - Сборочный конвейер как объект идентификации

Уравнение математического ожидания  $Z(t)$  для данного  $t$  получим из (2), взяв математическое ожидание правой и левой частей:

$$M \{ Z(t) \} = B_0(t) + \sum C_i(t) M \{ Y_i(t) \} + \sum P_i(t) M \{ W_i(t) \} \quad (3)$$

Из уравнения (3) видно, что математическое ожидание выходной переменной  $Z(t)$  зависит от математических ожиданий переменных  $Y_i(t)$ ,  $W_i(t)$  и коэффициентов множественной регрессии.

Для получения уравнения связи дисперсия выхода  $Z(t)$  и дисперсиями переменных  $Y_i(t)$  и  $W_i(t)$  общую дисперсию  $Z(t)$  представим в виде суммы двух слагаемых:

$$D\{Z(t)\} = D\{M\{Z(t)/Y_1(t), Y_2(t) \dots Y_n(t), W_1(t), W_2(t) \dots W_n(t)\}\} + M\{D\{Z(t)/Y_1(t), Y_2(t) \dots Y_n(t), W_1(t), W_2(t) \dots W_n(t)\}\}, \quad (4)$$

где  $D\{M\{Z(t)/Y_1(t), Y_2(t) \dots Y_n(t), W_1(t), W_2(t) \dots W_n(t)\}\} = M\{[M\{Z(t) / Y_1(t),$



$$Y_2(t) \dots Y_n(t), W_1(t), W_2(t) \dots W_n(t) \} - M\{Z(t)\} \}}, \quad (5)$$

Дисперсия математического ожидания характеризует ту часть дисперсии выхода, которая вызвана влиянием переменных  $Y_i(t)$  и  $W_i(t)$ :

$$M\{D\{Z(t)/Y_1(t), Y_2(t) \dots Y_n(t), W_1(t), W_2(t) \dots W_n(t)\}\} = M\{[Z(t) - M\{Z(t)/Y_1(t), Y_2(t) \dots Y_n(t), W_1(t), W_2(t) \dots W_n(t)\}]^2\}, \quad (6)$$

Математическое ожидание дисперсии связано с влиянием всех внутренних факторов ( не контролируемые переменные, погрешности измерения и т.д. ). Точность математического описания процесса сборки изделий будет тем выше, чем меньше доля второго слагаемого в общей дисперсии  $Z(t)$ .

### Уравнение связи дисперсии математического ожидания

$Z(t)$  с дисперсиями входных переменных  $Y_i(t)$  и  $W_i(t)$  получим из (5), подставив в это уравнение (2) и (3);

$$D\{M\{Z(t)/Y_1(t), Y_2(t) \dots Y_n(t), W_1(t), W_2(t) \dots W_n(t)\}\} = \sum C_i(t)D\{Y_i(t)\} + \sum P_i(t) D\{W_i(t)\} + 2 \sum^{n-1} \sum^n C_i(t) C_j(t) \text{cov}(Y_i(t), Y_j(t)) + 2 \sum^{n-1} \sum^n P_i(t) P_j(t) \text{cov}(W_i(t), W_j(t)) + 2 \sum^{n-1} \sum^n C_i(t) P_j(t) \text{cov}(Y_i(t), W_j(t)), \quad (7)$$

где  $\text{cov}(Y_i(t), Y_j(t)) = M\{(Y_i(t) - M\{Y_i(t)\})(Y_j(t) - M\{Y_j(t)\})\}$  - корреляционный момент переменных  $Y_i(t)$  и  $Y_j(t)$ .

Преобразуем уравнение (7) с учетом того, что движение материальных потоков деталей и узлов по различным технологическим маршрутам происходят независимо друг от друга. Это означает, что переменные  $Y_i(t)$ ,  $Y_j(t)$  и  $W_i(t)$ ,  $W_j(t)$  не коррелированы, т.е. при  $i \neq j$ ,  $\text{cov}(Y_i(t), Y_j(t)) = \text{cov}(W_i(t), W_j(t)) = \text{cov}(Y_i(t), W_j(t)) = 0$

Тогда получим:

$$D\{M\{Z(t) / Y_1(t), Y_2(t) \dots Y_n(t), W_1(t), W_2(t) \dots W_n(t)\}\} = \sum C_i(t)D\{Y_i(t)\} + \sum P_i(t)D\{W_i(t)\} + 2 \sum C_i(t)P_i(t)\text{cov}\{Y_i(t), W_i(t)\}, \quad (8)$$

Учитывая принятые ограничения и то, что корреляционный момент

выражается через коэффициенты корреляции и соответствующие средние квадратические отклонения, уравнение (8) примет следующий вид:

$$D\{M\{Z(t)/Y_1(t), Y_2(t) \dots Y_n(t), W_1(t), W_2(t) \dots W_n(t)\}\} = \sum C_i(t) D\{Y_i(t)\} + \sum P_i(t) D\{W_i(t)\} + 2 \sum C_i(t) P_i(t) \sqrt{D\{Y_i(t)\} D\{W_i(t)\}}, \quad (9)$$

Таким образом, мы получим, что дисперсия математического ожидания выходной переменной  $Z(t)$  относительно выходных переменных  $Y_1(t), Y_2(t) \dots Y_n(t)$  и  $W_1(t), W_2(t) \dots W_n(t)$ - зависит от дисперсий этих переменных и степени влияния их на выходную переменную, которая определяется коэффициентами множественной регрессии.

Рассмотрим определение коэффициентов множественной регрессии,  $C_i(t)$ ,  $P_i(t)$  ( $i=1 \dots n$ ) и  $b_0(t)$  с помощью метода наименьших квадратов. Для этого необходимо, чтобы математическое ожидание квадрата отклонения  $Z(t)$  от  $\{M\{Z(t)/Y_1(t), Y_2(t) \dots Y_n(t), W_1(t), W_2(t) \dots W_n(t)\}$  было минимальным:

$$F = M\{[Z(t) - M\{Z(t)/Y_1(t), Y_2(t) \dots Y_n(t), W_1(t), W_2(t) \dots W_n(t)\}]^2\} = \min, \quad (10)$$

$b_0(t), C_i(t), P_i(t)$  ( $i=1, 2 \dots n$ )

$$\frac{\partial f}{\partial b_0(t)} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial C_i(t)} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial P_i(t)} = 0; \quad (i=1, 2 \dots n), \quad (11)$$

при этом получим  $2n+1$  уравнение для определения коэффициентов:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial b_0(t)} = -2 M\{Z(t) - b_0(t) - \sum C_i(t) Y_i(t) - \sum P_i(t) W_i(t)\} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial C_1(t)} = -2 M\{Z(t) - b_0(t) - \sum C_i(t) Y_i(t) - \sum P_i(t) W_i(t)\} Y_1(t) = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial C_n(t)} = -2 M\{Z(t) - b_0(t) - \sum C_i(t) Y_i(t) - \sum P_i(t) W_i(t)\} Y_n(t) = 0, \quad (12) \\ \frac{\partial f}{\partial P_1(t)} = -2 M\{Z(t) - b_0(t) - \sum C_i(t) Y_i(t) - \sum P_i(t) W_i(t)\} W_1(t) = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial P_n(t)} = -2 M\{Z(t) - b_0(t) - \sum C_i(t) Y_i(t) - \sum P_i(t) W_i(t)\} W_n(t) = 0 \end{array} \right.$$

Из первого уравнения системы (12) можно определить  $b_0(t)$ :

$$b_0(t) = M\{Z(t)\} - \sum C_i(t) M\{Y_i(t)\} - \sum P_i(t) M\{W_i(t)\}, \quad (13)$$

Следующие  $2n$  уравнений системы (12) после преобразований примут вид:



$$\left\{ \begin{aligned}
 \text{Cov}(Z(t), Y_1(t)) &= \sum C_i(t) \text{cov}(Y_i(t), Y_1(t)) + \sum P_i(t) \text{cov}(W_i(t), Y_1(t)) \\
 \dots \\
 \text{Cov}(Z(t), Y_n(t)) &= \sum C_i(t) \text{cov}(Y_i(t), Y_n(t)) + \sum P_i(t) \text{cov}(W_i(t), Y_n(t)) \\
 \text{Cov}(Z(t), W_1(t)) &= \sum C_i(t) \text{cov}(Y_i(t), W_1(t)) + \sum P_i(t) \text{cov}(W_i(t), W_1(t)) \\
 \dots \\
 \text{Cov}(Z(t), W_n(t)) &= \sum C_i(t) \text{cov}(Y_i(t), W_n(t)) + \sum P_i(t) \text{cov}(W_i(t), W_n(t))
 \end{aligned} \right. \quad (14)$$

Учитывая, что переменные  $Y_i(t)$  и  $W_i(t)$  не коррелированы, т.е. при  $i \neq j$   $\text{cov}(Y_i(t), W_j(t)) = \text{cov}(Y_i(t), W_j(t))$  получим:

$$\left\{ \begin{aligned}
 C_i(t) \rho_{y_1} \sigma_{y_1} + P_1(t) \rho_{w_1 y_1} \sigma_{w_1} &= \rho_{zy_1} \sigma_z \\
 \dots \\
 C_n(t) \rho_{y_n} \sigma_{y_n} + P_n(t) \rho_{w_n y_n} \sigma_{w_n} &= \rho_{zy_n} \sigma_z \\
 C_i(t) \rho_{y_1} \sigma_{y_1} + P_1(t) \rho_{w_1 y_1} \sigma_{w_1} &= \rho_{zy_1} \sigma_z \\
 \dots \\
 C_n(t) \rho_{y_n} \sigma_{y_n} + P_n(t) \rho_{w_n y_n} \sigma_{w_n} &= \rho_{zy_n} \sigma_z
 \end{aligned} \right. \quad (15)$$

Система уравнений (15) позволяет найти искомые коэффициенты множественной регрессии  $C_i(t)$  и  $P_i(t)$ , которые используются при построении математической модели сборки изделия.

**Литература**

1. Райбман Н.С., Чадаев В.М. Построение моделей производства. М.: "Энергия", 1995.
2. Таранов В.А., Брудник С.С., Кофанов Ю.Н. Математические вопросы автоматизации производственных процессов. М.: "Высшая школа", 1968.