МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ ИНВЕСТИЦИОННЫХ СТРУКТУР ПО КРИТЕРИЮ ИЗДЕРЖЕК

Махмудов А.Г., Воропаева В.Я.
Инвестиционная компания ДИКОМ,
Донецкий государственный технический университет, кафедра АТ
E-mail: vita@fcita.dn.ua

Abstract.
A. Mahmudov, V. Voropaeva "Optimization model of investment structures according to cost criterion". *Subject of this article is the optimization model of investment structures. Mass serving theory is applied to sensitivity analysis of the investment structure efficiency and minimizing of serving cost.*

Идея привлечения капитала массового инвестора, его накопления с целью последующего распределения по приоритетным проектам, а также своевременного возврата капитала инвесторам (клиентам) вызывает необходимость создания соответствующих структур обслуживания клиентов с минимальными издержками.

Возникает задача оптимизации структуры системы для минимизации издержек обслуживания и увеличения привлекательности инвестиций путём выбора рационального числа точек (каналов) распространения инвестиционных (фондовых) инструментов, активизации потока клиентов, увеличения пропускной способности агентов, рекламы фондовых инструментов, использования системы поощрения, штрафов и проч.

Базой построения модели системы привлечения, аккумуляции и возврата капитала является теория прогнозирования случайных процессов и теория массового обслуживания.

Общая структура модели приведена на рис. 1. Система построена по модульному принципу и включает: модули (каналы) обслуживания потоков клиентов МОК различных категорий (распространения акций, сертификатов, облигаций и других инвестиционных инструментов), модуль активизации потока клиентов МАПК по привлекательности инвестиций (цена, реклама, льготы, % ставка и проч.), модуль накопления капитала и оптимизации резерва МНКОР, модуль прогнозирования потоков клиентов МППК, модуль регистрации и учёта движения текущего капитала МРУК, модуль управления системой обслуживания МУСО.

На рис. 1 приняты обозначения: λ_{ij} - интенсивность потока клиентов i-той категории для j-го инвестиционного инструмента, μ_{ij} - то же для интенсивности обслуживания, $\overline{\lambda}_i$ - суммарные интенсивности потоков по категориям, $X_П, X_Р$ - привлечённый капитал и резерв, $U_Н$ - управление накоплением, U_{01}-U_{0N} - управление обслуживанием, $U_а$ - управление активизацией клиентов, $U_1 - U_N$ - управляющие воздействия по активизации клиентов (реклама, цены, льготы и т.п.).

Приведённая структура системы массового обслуживания (СМО) пригодна и для возврата капитала клиентам, с той лишь разницей, что клиенты, поступающие в систему, не вносят, а забирают часть инвестиционного капитала.

Граф СМО приведён на рис. 2. Определению подлежат характеристики СМО, обусловливающие её эффективность: среднее число занятых каналов k_0, среднее число клиентов, находящихся в СМО, как обслуживающихся, так и в очереди m_S, вероятность простоя СМО - P_0, длина очереди $k_{ож}$, время ожидания в очереди $T_{ож}$. Состояния S_n для графа рис. 2 нумеруются по числу клиентов, связанных с СМО (S_0- все каналы свободны; S_1- один канал занят; S_N- все каналы заняты; S_{N+1}- все каналы заняты, один в очереди и т.д.).

Основой получения модели для графа рис. 2 является система уравнений Колмогорова [1] для установившегося режима при $\dfrac{dp_n(t)}{dt} = 0$:

$$m\lambda P_0 = \mu P_1; \qquad (1)$$

$$[(m-n)\lambda + n\mu]P_n = (m-n+1)\lambda P_{n-1} + (n+1)P_{n+1}; \qquad (2)$$

$$n\mu P_m = \lambda P_{m-1} \quad при \quad N \le n \le m. \qquad (3)$$

где n - число клиентов, поступивших для обслуживания.

Для случая $0 \le n \le N$ имеем:

$$m\lambda P_0 = \mu P_1 \qquad (4)$$

$$[(m-n)\lambda + N\mu]P_n = (m-n+1)\lambda P_{n-1} + N\mu P_{n+1} \qquad (5)$$

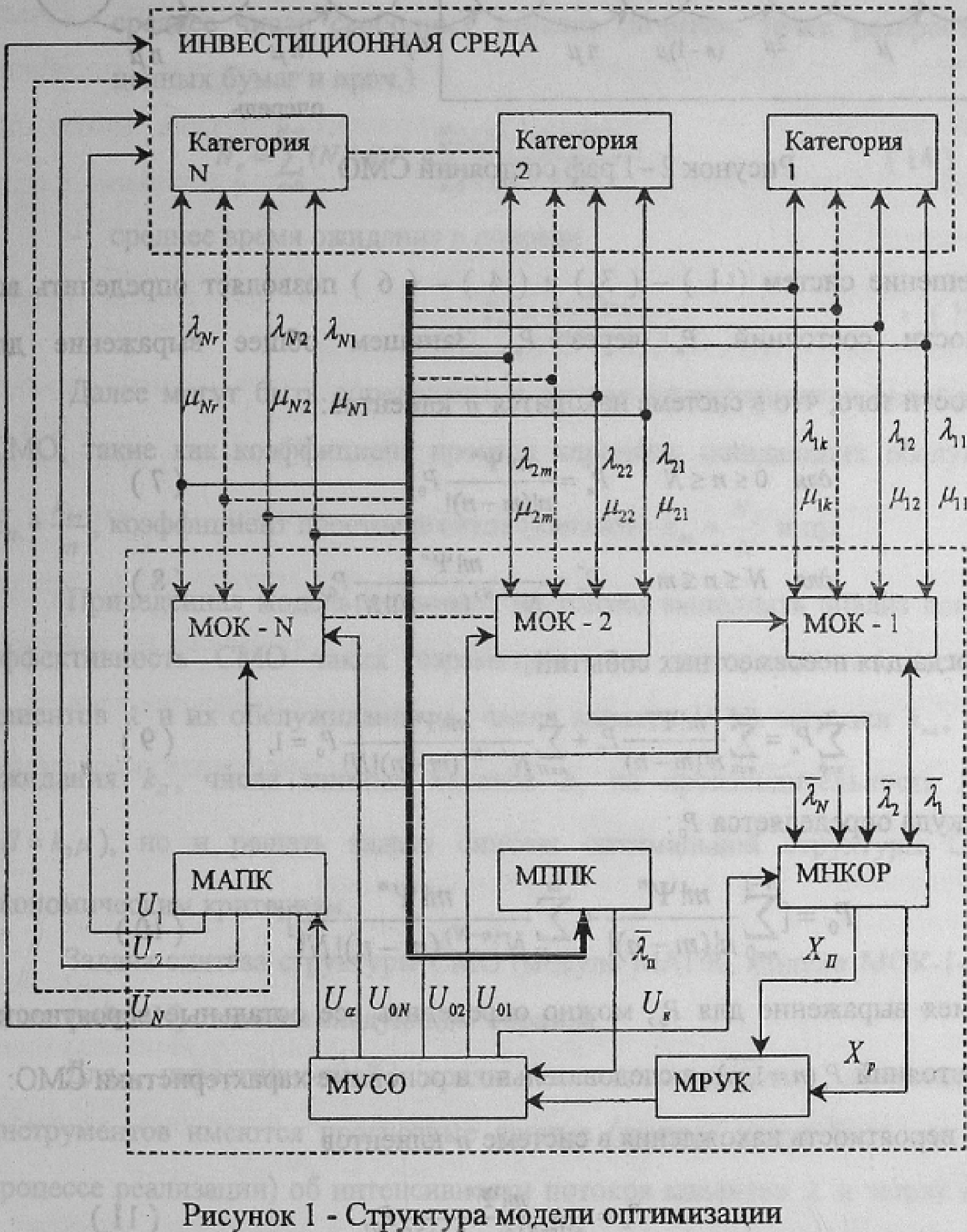

Рисунок 1 - Структура модели оптимизации

$$N\mu P_m = \lambda P_{m-1}, \qquad (6)$$

где n- номер текущего состояния S $(n = \overline{0,m})$.

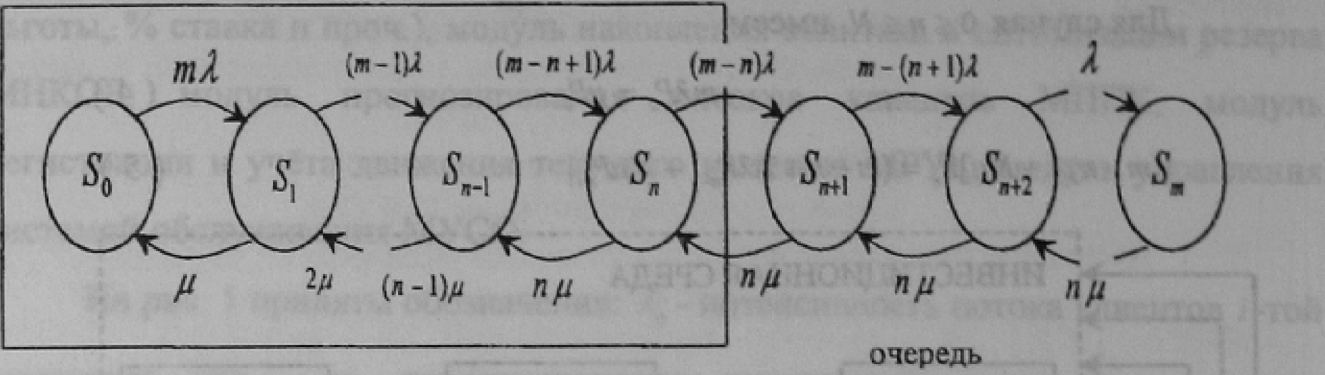

Рисунок 2 - Граф состояний СМО

Решение систем (1) – (3) и (4) – (6) позволяет определить все вероятности состояний P_n через P_0. Запишем общее выражение для вероятности того, что в системе находится n клиентов:

$$\text{для} \quad 0 \le n \le N \qquad P_n^{'} = \frac{m!\Psi^n}{n!(m-n)!}P_0; \qquad (7)$$

$$\text{для} \quad N \le n \le m \qquad P_n^{''} = \frac{m!\Psi^n}{N^{(n-N)}(m-n)!N!}P_0, \qquad (8)$$

Тогда для несовместных событий

$$\sum_{n=0}^{m} P_n = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{m!\Psi^n}{n!(m-n)}P_0 + \sum_{n=N}^{m} \frac{m!\Psi^n}{N^{(n-N)}(m-n)!N!}P_0 = 1, \qquad (9)$$

откуда определяется P_0:

$$P_0 = [\sum_{n=0}^{N-1} \frac{m!\Psi^n}{n!(m-n)!} + \sum_{n=N}^{m} \frac{m!\Psi^n}{N^{(n-N)}(m-n)!N!}]^{-1} \qquad (10)$$

Имея выражение для P_0, можно определить все остальные вероятности состояний $P_n(n=\overline{1,m})$, а следовательно и основные характеристики СМО:

- вероятность нахождения в системе n клиентов

$$P_n = \frac{m!\Psi^n}{N^{(n-N)}(m-n)!N!}P_0; \qquad (11)$$

- среднее число клиентов, ожидающих обслуживания (в очереди)

$$k_{оч} = \sum_{n=N+1}^{m} (n-N)\frac{m!\Psi^n}{N^{(n-N)}(m-n)!N!}P_0; \qquad (12)$$

- среднее число клиентов, находящихся в системе (как обслуживающихся, так и в очереди)

$$k_c = k_{оч} + \sum_{n=1}^{N} \frac{nm!\Psi^n}{(m-n)!\,n!} P_0 \; ; \qquad (13)$$

- среднее число свободных каналов (агентов, точек распространения ценных бумаг и проч.)

$$N_c = \sum_{n=0}^{N-1} (N-n) P_n = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(N-n)m!\Psi^n}{(m-n)!n!} P_0 ; \qquad (14)$$

- среднее время ожидания в очереди

$$T_{оч} = \frac{k_{оч}}{\mu(N-N_c)} \qquad (15)$$

Далее могут быть определены и другие характеристики анализируемой СМО, такие как коэффициент простоя клиентов, ожидающих обслуживания $k_П = \frac{k_{оч}}{m}$, коэффициент простоя агентов (каналов) $k_{па} = \frac{N_c}{N}$ и пр.

Приведенная модель позволяет не только выполнять анализ влияния на эффективность СМО таких параметров, как интенсивности поступления клиентов λ и их обслуживания μ, числа каналов N, их загрузки $k_{па}$, времени ожидания $k_П$, числа занятых каналов k_0 на производительность $П$ СМО ($П = k_0\mu$), но и решать задачу синтеза оптимальной структуры СМО по экономическим критериям.

Задача синтеза структуры СМО (модуль МАПК, модули МОК-1-МОК-N категорий 1-N) ставится следующим образом.

Для инвестиционной среды и совокупности инвестиционных инструментов имеются прогнозные данные (данные могут быть получены в процессе реализации) об интенсивности потоков клиентов λ и затрат времени на их обслуживание μ, известны издержки на содержание агентов, бюро, контор и т.п. и их оснащение, затраты на рекламу, агитацию по привлекательности инвестиции и проч., приходящиеся на клиента, известен годовой, квартальный или другой режим работы СМО, требуется определить структуру СМО, обеспечивающую минимум приведенных затрат на обслуживание, при выполнении соответствующих ограничений на параметры обслуживания (время ожидания, пропускную способность, число каналов, их загрузку и проч.).

Фактически задача является многокритериальной, поскольку в качестве критериев могут быть выбраны длина очереди, пропускная способность, степень загрузки и т.п. Скаляризация векторного критерия может быть выполнена выбором доминирующего критерия и переводом остальных в разряд ограничений [2].

В качестве доминирующей целевой функции при синтезе приняты удельные приведенные затраты на одно обслуживание:

$$Q_{пр} = \frac{P_0 C_{пк} N + (1-P_0) C_{pk} N + C_{ПТ}}{\mu(1-P_0)} + \frac{E_H (B_k N + m B_T)}{T_Э \mu (1-P_0)}, \qquad (16)$$

где $C_{ПК}$ - затраты при простое канала в единицу времени, C_{pk} - затраты при обслуживании, $C_{ПТ}$ - средние затраты на содержание клиента (офис, реклама, оборудования офиса и проч.), B_K, B_T - капитальные вложения на оснащение канала (компьютеры, связь, оборудование) и создание удобств для клиента, $T_Э$ - режим эксплуатации СМО (число часов), E_H - нормативный коэффициент эффективности капитальных затрат.

Подставляя (10) в (16), получим окончательно

$$Q_{пр} = \frac{C_{pk} N - C_{ПК} N}{\mu} + \frac{C_{ПК} N + m C_{ПТ} + \frac{E_H}{T_Э} B_K N + \frac{E_H}{T_Э} B_T m}{\mu\left[1 - \left(1 + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{m \Psi^n}{n!(m-n)!} + \sum_{n=N}^{m} \frac{m! \Psi^n}{N! N^{(n-N)} (m-n)!}\right)\right]}. \qquad (17)$$

Ограничения могут быть сформулированы в различных вариантах, например:

- по загрузке СМО

$$N_c(\lambda, \mu, N, m) \ge N_д ; \qquad (18)$$

- по пропускной способности СМО

$$П(k_0, N, m) \ge П_д ; \qquad (19)$$

- по числу мест для клиентов, размещаемых в офисе при наличии очереди

$$k_{оч}(\lambda, \mu, N, m) \geq k_{д}; \qquad (20)$$

- по времени ожидания клиентом обслуживания в очереди

$$T_{оч}(\lambda, \mu, N, m) \leq T_{д}; \qquad (21)$$

- по суммарным затратам на создание СМО

$$C_{с}(C_{рk}, C_{ПК}, C_{ПТ}, B_{К}, B_{Т}) \leq C_{сд} \qquad (22)$$

Здесь $N_{д}, П_{д}, K_{д}, T_{д}$ - допустимые величины параметров в ограничениях.

Оптимизация структуры СМО по всем параметрам с целевой функцией (17) и ограничениями (18) – (22) затруднительна, поскольку (17) задана неявно. Однако, задаваясь, например, числом каналов N, прогнозируя и активизируя интенсивность потока λ, зная μ, а следовательно и $\Psi = \dfrac{\lambda}{\mu}$, можно задачу (17), (18) - (22) свести к классической задаче нелинейного программирования.

Более просто можно получить решение алгоритмически на базе ЭВМ.

Для этого представим целевую функцию (17) в виде двух слагаемых, одно из которых не зависит от переменных оптимизации:

$$Q(m)_{пр} = Q_0 + \frac{(C_{пр} + B_{к}E_{н}/T_{э})N + m(C_{пт} + B_{т}E_{н}/T_{э})}{\mu(1 - P_0(m))}. \qquad (23)$$

Выражение (23) используется для определения оптимального числа клиентов m_0, которое может обслужить N – канальная система с минимальными затратами (либо числа каналов для обслуживания заданного m числа клиентов). Здесь используется условие:

$$Q_{пр}(m_0 - 1) < Q_{пр}(m_0) < Q_{пр}(m_0 + 1), \qquad (24)$$

а решение заключается в вычислении левой и правой частей (24), чем и отыскивается оптимальное значение m_0, заключенное между ними, при соблюдении ограничений (18) – (22).

Литература

1. Саульев В.К. Математические модели теории массового обслуживания. - М.: Статистика,1979. - 96 с.
2. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. - М.: Наука, 1978. - 399с.