

УДК: 628.1-628.3: 669.053.2: 669.187.004.18: 621.365.43+001.891

**В.Ю. ВАРХАЛЕВ**

Донецкий национальный технический университет

**Ю.П. ВАРХАЛЕВ** (канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.)

Донецкий государственный научно-исследовательский институт пластмасс

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ  
ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ СЛОЯ СЫПУЧЕГО  
ЭЛЕКТРОПРОВОДНОГО МАТЕРИАЛА**

The mathematical model of full active resistance definition of conducting heterogeneous bulk material has been examined for different modes of electric power supply in the volume being heated. The accepted fragmentation into final elements of the material working volume has allowed constructing unambiguously the equivalent electric diagram describing the processes taking place in the units at passing of electric current. A simple algorithm for construction of a system of Kirghof equations for any geometrical configuration of initial volume of a heated up material is specified. On the basis of mathematical mode the distribution of evolving specific power throughout the working volume of material is calculated at a given consumed power of the unit.

**Введение.** Изучению электрического поля в ваннах рудотермических печей посвящены многие теоретические и экспериментальные исследования [1-3]. Исследование поля однофазной ванны на моделях, у которых проводящей средой служил мелкий кокс или кристалл, рассмотрено в работах [4-5].

В последнее время построению математических моделей расчета электрического сопротивления и контактной теплопроводности зернистого термоантрацита посвящены работы сотрудников Института электросварки им. Е.О. Патона под руководством В.И. Лакомского [6-9]. В них предлагается аппроксимация зернистого термоантрацита различного фракционного состава набором шарообразных частиц. При расчете удельного сопротивления принимается гексагональная схема укладки шаров, как наиболее вероятная при действии на элементарные шары силы тяжести (давления). В работе [6] при определении результирующего сопротивления единицы объема сыпучего материала за основу принята эквивалентная электрическая схема с параллельным включением элементарных электрических сопротивлений между введенными шарообразными частицами.

**Цель работы.** Во многих пирометаллургических агрегатах слой сыпучего электропроводящего материала, содержащего в основе твердый углеродистый остаток (кокс, графит), используется как нагревательный элемент, в котором за счет прохождения через него электрического тока выделяется тепло согласно закону Джоуля-Ленца. Такой слой материала используется как для просушки и спекания футеровки плавильных камер агрегатов электрошлакового переплава, так и для дальнейшего наплавления шлаковой ванны.

Перспективными в настоящее время представляются установки высокотемпературной утилизации твердых бытовых отходов (ТБО) [10], где в качестве стабилизирующего источника дополнительного тепла, компенсирующего периодический недостаток собственных тепловых ресурсов ТБО, необходимых для стабильной работы в автотермическом режиме, является электронагрев нижней зоны реактора, используемый как для поддержания стойкого горения углеродистых остатков при заданной температуре, так и для бесперебойного расплавления и удаления минеральных составляющих ТБО (зола) из нижней зоны реактора. Стабилизирующий электронагрев позволяет максимально эффективно управлять температурой протекающих эндо-, экзотермических реакций взаимодействия твердого углеродистого остатка ТБО (полукокс) с паровоздушной смесью, стремясь перевести их в автогенный режим, за счет высвобождения внутренней энергии ТБО.

**Постановка задачи и результаты исследования.** При проектировании новых и эксплуатации действующих электротермических установок, где в качестве сопротивления (теплогенератора) выступает слой электропроводного сыпучего материала, а так же для улучшения их технико-экономических показателей, подбора и модернизации электропитающего оборудования, актуальной задачей является построение математической модели расчета электросопротивления и распределения мощности в рассматриваемом слое материала, в динамике тепло-физических и физико-химических процессов, протекающих в рассматриваемых агрегатах.

Для формализации предлагаемой математической модели расчета электрического сопротивления неоднородного сыпучего материала различного фракционного состава используем эргодическую гипотезу [11]. Согласно этой гипотезе:

- для определения исследуемых характеристик материала нет необходимости проводить усреднение по составляющим материала (ансамблю), а достаточно провести усреднение по объему;

- упорядоченная структура обладает дальним порядком и всегда позволяет выделить элементарные ячейки (объемы), в которых геометрические и физические свойства равны соответствующим свойствам всей системы (материала).

При построении математической модели, описывающей распределение токов (удельных мощностей) в слое сыпучего неоднородного материала, весь объем материала можно условно разделить на элементарные объемы - кубы с гранью  $d$ , которые, согласно эргодической гипотезе, заменяем шарами диаметра  $d$ . Шар в кубе является той элементарной ячейкой, где соблюдается равенство всех геометрических и физических характеристик материала, как для элементарной ячейки, так и для всего объема куба [11]. Плотное заполнение объема шарами возможно двумя способами: гранецентрированное и гексагональное. В первом случае шары внутреннего слоя соприкасаются с двумя шарами верхнего и нижнего слоев. Во втором случае такие шары соприкасаются с тремя шарами соответствующих слоев. Плотность заполнения шарами равного диаметра при этом одинаковая и равна примерно 74% всего объема. В дальнейшем рассматриваем только гексагональное заполнение шарами равного диаметра всего рабочего объема токопроводящего материала, как наиболее вероятное заполнение упорядоченной системы (сыпучего материала под действием силы тяжести).

Принимаем ряд принципиальных допущений, касающихся физического состояния исследуемого материала:

во-первых, предполагаем, что весь объем материала, в котором протекает ток, имеет одинаковую температуру. Как покажем в дальнейшем, легко перейти к случаю неравномерной температуры по всему объему материала;

во-вторых, рассматриваем установившийся режим, т.е. режим со стабильным активным сопротивлением слоя материала, при заданной температуре. В реальных сыпучих материалах (например, коксе) при начальной подаче напряжения на электроды, введенные в слой материала, в нем, за счет повышения температуры, происходят физико-химические преобразования - удаление влаги, летучих. В этот период активное сопротивление слоя материала нестабильно, возникают электрические разряды (дуги) между отдельными кусками материала. Слой материала за счет выделения энергии, согласно закону Джоуля-Ленца, начинает нагреваться, и после удаления влаги и основной части газообразных летучих в слое устанавливается устойчивый электрический режим работы. В нагретом состоянии слой материала имеет стабильное активное сопротивление.

Алгоритм построения математической модели рассмотрим на примере плоского слоя сыпучего материала высоты  $H$  прямоугольной формы ( $L$  - длина слоя,  $S$  - ширина слоя сыпучего материала). Через слой материала пропускается ток.

Для однозначного описания математической модели введем прямоугольную систему координат  $Oxyz$ , где ось  $Oz$  направлена вдоль высоты  $H$ , а оси  $Ox$ ,  $Oy$  направлены вдоль длины  $L$  и ширины  $S$ . Заполнение шарами начинаем с плоскости  $z=0$ . Первый плоский слой шаров (нечетный) в плоскости  $Oxy$  имеет вид, изображенный на рисунке 1 сплошными линиями.

Следующий по высоте слой шаров (четный) изображен на рисунке 1 прерывистыми линиями. Такое чередование нечетных и четных плоских слоев вдоль оси  $Oz$  продолжается до полного заполнения всего объема по высоте. Общий вид заполнения шарами показан на рисунке 1 справа.

Указанное гексагональное заполнение шарами рассматриваемого объема приводит к следующим соотношениям между геометрическими размерами, характеризующими объем, и принятым диаметром эквивалентных шаров:

$$H=d(1+\sqrt{6}(g-1)/3); \quad S=d(1+\sqrt{3}/6+\sqrt{3}(n-1)/2); \quad L=d(1/2+nm).$$

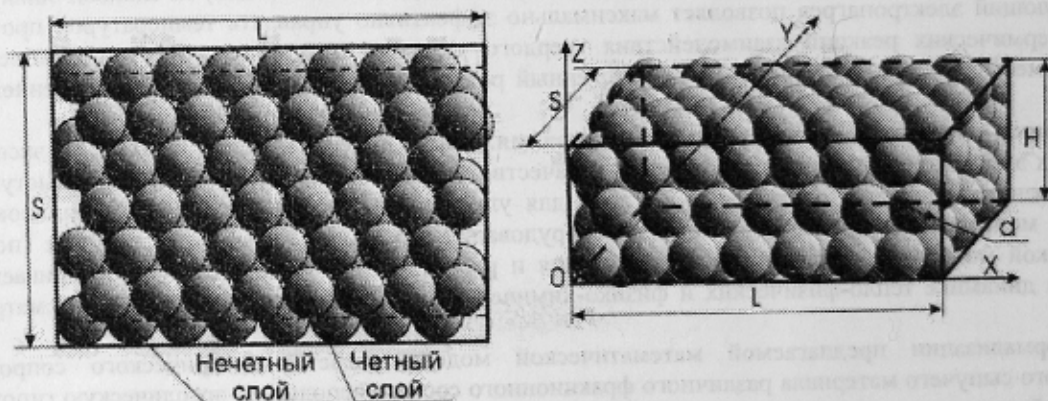


Рисунок 1 - Заполнение эквивалентными шарами объема нагреваемого материала



Здесь  $g, n, m$  целое количество шаров, укладываемых, соответственно, по высоте, по ширине и по длине объема при гексагональном заполнении шарами. Соединив центры соприкасающихся между собой шаров, получим неориентированный граф, описывающий эквивалентную электрическую схему, в которой дуги являются элементарными сопротивлениями. При этом считаем, что сопротивления одинаковы для любых соприкасающихся шаров. На рисунке 2 изображен фрагмент неориентированного графа для нечетного и четного слоев шаров по высоте с учетом дуг, соединяющих эти слои (плоскость  $Oxy$ ).

Отметим, что элементарные сопротивления принятого разбиения на эквивалентные шары будут пропорциональны удельному сопротивлению материала и обратно пропорциональны диаметру шаров [3], т.е. зависят от степени разбиения (заполнения) рабочего объема элементарными шарами.

Для полного описания эквивалентной электрической схемы необходимо построенный граф ориентировать.

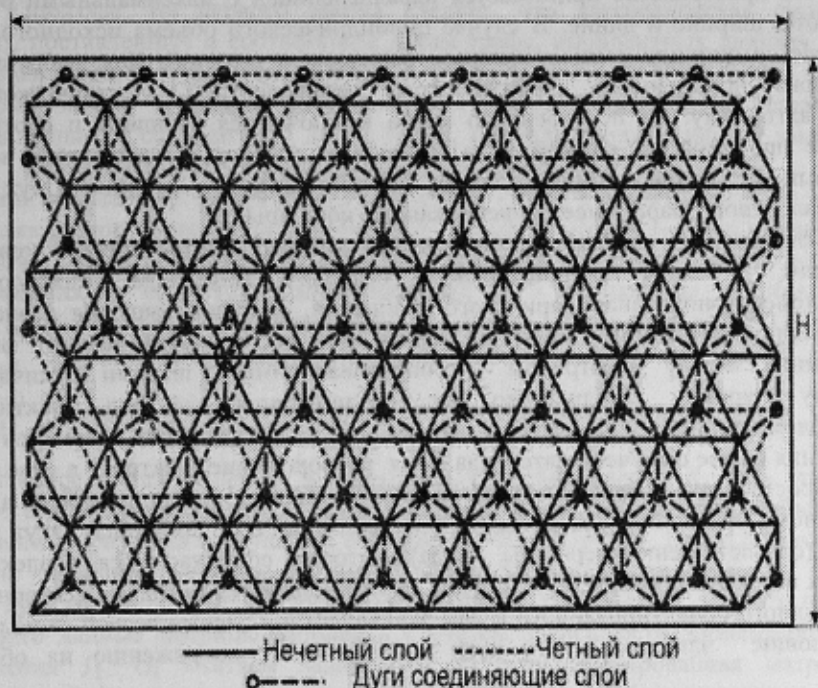


Рисунок 2 - Неориентированный граф

Алгоритм нумерации вершин графа и ориентации дуг. Каждая вершина характеризуется тремя целыми числами:  $(k, i, j)$ . Число  $k$  соответствует номеру слоя элементарных шаров вдоль оси  $Oz$  для принятого разбиения. В плоскости слоя с номером  $k$  (плоскость  $Oxy$ ) нумерация вершин следующая: число  $i$  соответствует номеру ряда шаров вдоль оси  $Oy$ , а число  $j$  - номер шара вдоль оси  $Ox$ . Таким образом, узел  $A(k, 4, 3)$  (рис. 2) характеризуется числами:  $k$  - номер слоя разбиения, 4 - четвертый ряд, 3 - третий элемент в рассматриваемом ряду. Общее количество вершин в графе будет  $N = gnm$ . Первоначальная нумерация вершин произвольная.

Расположив начало системы координат  $Oxyz$  в точке  $(0,0,0)$ , однозначно определяем координаты любой вершины  $(k, i, j)$  построенного графа.

При ориентации дуг принимаем условие, при котором любой внутренней вершины графа количество входящих и выходящих дуг одинаково и равно 6. Для полной ориентации графа достаточно рассмотреть только выходящие из вершины  $(k, i, j)$  дуги. Так для любой вершины  $(k, i, j)$ , если существуют дуги, то они имеют направление:

$$(k, i, j) \rightarrow (k, i, j+1) \text{ для всех } j < m;$$

$$(k, i, j) \rightarrow (k, i+1, j) \text{ для всех } i < n;$$

$$(k, i, j) \rightarrow (k+1, i, j) \text{ для всех } k < g;$$

Определили три дуги из шести. Для определения остальных дуг рассмотрим смежные вдоль оси  $Oz$  слои с номерами  $k, k+1$ , и будем различать следующие случаи:

1. Значение  $k$  нечетное, значение  $i$  нечетное

$$(k, i, j) \rightarrow (k, i+1, j-1) \text{ для всех } j > 1 \text{ и } i < n;$$

$$(k, i, j) \rightarrow (k+1, i, j-1) \text{ для всех } j > 1 \text{ и } k < g;$$

$$(k, i, j) \rightarrow (k+1, i-1, j) \text{ для всех } i > 1 \text{ и } k < g;$$

2. Значение  $k$  нечетное, значение  $i$  четное

$$(k, i, j) \rightarrow (k, i+1, j+1) \text{ для всех } j < m \text{ и } i < n;$$

$$(k, i, j) \rightarrow (k+1, i, j+1) \text{ для всех } j < m \text{ и } k < g;$$

$$(k, i, j) \rightarrow (k+1, i-1, j) \text{ для всех } i > 1 \text{ и } k < g;$$

3. Значение  $k$  четное, значение  $i$  нечетное
$$(k, i, j) \rightarrow (k, i+1, j+1) \text{ для всех } j < m \text{ и } i < n;$$

$$(k, i, j) \rightarrow (k+1, i, j+1) \text{ для всех } j < m \text{ и } k < g;$$

$$(k, i, j) \rightarrow (k+1, i+1, j) \text{ для всех } i < n \text{ и } k < g;$$
4. Значение  $k$  четное, значение  $i$  четное
$$(k, i, j) \rightarrow (k, i+1, j-1) \text{ для всех } j > 1 \text{ и } i < n;$$

$$(k, i, j) \rightarrow (k+1, i, j-1) \text{ для всех } j > 1 \text{ и } k < g;$$

$$(k, i, j) \rightarrow (k+1, i+1, j) \text{ для всех } i < n \text{ и } k < g;$$

Нумерация дуг в ориентированном графе произвольная. Общее количество дуг в построенном графе:  $M = 6nm - 3(nm + ng + mg) + (n + m + g)$ .

Если пространство нагреваемого материала имеет сложную геометрическую конфигурацию, тогда за первоначальное рабочее пространство принимается параллелепипед с максимальными размерами исходного пространства по высоте, ширине и длине. В случае цилиндрического объема исходного материала сложной конфигурации выбирается цилиндр с максимальным радиусом и высотой. Для выбранного таким образом покрытия нагреваемого пространства строится граф эквивалентной электрической схемы согласно приведенному выше алгоритму. Из построенного графа исключаются вершины и соответственно дуги, не входящие в реальное пространство нагреваемого материала. Алгоритм исключения вершин и дуг легко реализуется средствами векторной алгебры для декартовой системы координат Охуз, в которой каждая вершина (центр эквивалентного шара) имеет фиксированные координаты.

Дополним граф фиктивными вершинами, количество которых соответствуют количеству электродов, подающих напряжение в слой токопроводящего сыпучего материала. Каждую вершину графа, соответствующую элементарному шару принятого разбиения, соприкасающуюся с электродом, соединим дугой с фиктивной вершиной данного электрода. Такая дуга всегда направлена от фиктивной вершины. Величина сопротивления между электродом и соприкасающимися шарами отличается от величины сопротивления между шарами. Количество дуг, соединяющих электрод (фиктивную вершину) с соприкасающимися элементарными шарами, зависит от геометрических размеров соответствующего электрода, его положения в слое сыпучего материала. Зная расположение электрода в слое сыпучего материала и его геометрию, из пространства построенного графа исключаем вершины, попадающие в объем, занимаемый электродом. По заданному уравнению поверхности электрода в системе координат Охуз легко определяются элементарные шары (соответственно вершины графа), которые соприкасаются с электродом. Процедура построения фиктивных вершин и соответствующих дуг легко реализуется методами векторной алгебры.

Для построения полного ориентированного графа эквивалентной электрической схемы необходимо задать также дуги, соединяющие электроды. Эти дуги соответствуют напряжению на обмотках питающего трансформатора.

Приняв такой формализм, мы однозначно определяем ориентированный граф эквивалентной электрической схемы нагреваемого материала для любого диаметра  $d$  элементарных шаров.

Для эквивалентной электрической схемы построим уравнения Кирхгофа.

**Уравнения Кирхгофа.** Математически линейный граф однозначно отображается матрицей инцидентий  $A$  [12]. У матрицы инцидентий каждая строка соответствует одному узлу, а столбцы соответствуют номерам дуг. Если дуга с номером  $j$  входит в узел с номером  $i$ ,  $A_{ij} = 1$ ; если же дуга с номером  $j$  выходит из узла с номером  $i$ ,  $A_{ij} = -1$ .

В графе имеется  $v = N - 1$  ветвей дерева и  $w = M - N + 1$  хорд. Число  $w$  является цикломатическим числом графа. Любому произвольно выбранному дереву графа однозначно соответствует главное сечение (обобщенный узел) и фундаментальная система  $w$  циклов. Для ориентированного графа  $v - 1$  главное сечение характеризуется матрицей главных сечений  $Q = \|q_{ij}\|$ ,  $i = 1, \dots, v - 1$ ,  $j = 1, \dots, N$ . Значение  $q_{ij} = 1$ , если  $j$  дуга принадлежит  $i$ -тому сечению, и ее направление совпадает с направлением ветви дерева с номером  $i$ , и  $q_{ij} = -1$ , если  $j$  дуга принадлежит  $i$ -тому сечению, и ее направление противоположно направлению ветви дерева с номером  $i$ . Значение  $q_{ij} = 0$ , если  $j$  дуга не принадлежит  $i$ -тому сечению. Ранг матрицы  $Q$  равен  $v - 1$ .

Система фундаментальных циклов характеризуется цикломатической матрицей  $B = \|b_{ij}\|$ ,  $i = 1, \dots, w$ ,  $j = 1, \dots, M$ .

При этом  $b_{ij} = 1$ , если  $j$  дуга входит в  $i$  фундаментальный цикл и ее направление совпадает с направлением хорды дерева с номером  $i$  в этом цикле, и  $b_{ij} = -1$ , если  $j$  дуга входит в  $i$  фундаментальный цикл и ее направление противоположно направлению хорды дерева с номером  $i$  в этом цикле. И, наконец,  $b_{ij} = 0$ , если  $j$  дуга не входит в  $i$  фундаментальный цикл.

Алгоритм построения матрицы  $Q$  (матрицы главных сечений) из матрицы  $A$  (матрицы инцидентий) заключается в выборе  $v - 1$  единичных базисных вектор-столбцов с номерами, соответствующими ветвям дерева.

Матрица  $B$  содержит  $w$  единичных базисных вектор-столбцов, номера которых соответствуют номерам хорд графа. Взаимосвязь между матрицами  $Q, B$ :  $BQ^T = Q^T B$ . Применяв алгоритм исключений Гаусса к матрице инцидентий  $A$ , получаем дерево графа ( $v - 1$  единичных независимых вектор-столбцов) и матрицу главных сечений  $Q$ . Последняя строка нулевая. Переставим столбцы в матрице  $Q$  так, чтобы  $Q = [I/Q_a]$ . Перестановка соответствует перенумерации дуг графа. Дуги дерева пронумерованы теперь от 1 до  $v - 1$ . При этом матрица  $B$  примет вид  $B = [B_a/I]$ . Здесь  $I$  - единичная матрица.



Ориентированный граф эквивалентной электрической схемы нагреваемого объема сыпучего материала дополняем направленными дугами, соединяющими электроды, которые соответствуют фазным напряжениям на обмотках питающего трансформатора.

Вводим следующие ограничения:

а) фиктивные дуги, соответствующие обмоткам трансформатора, не должны входить в дерево (дерево графа всегда можно выбрать и без вхождения этих дуг);

б) эти дуги нумеруются последними.

Тогда матрица  $Q$  имеет вид  $Q=I/Q_1/Q_2$ . Здесь  $I$  - единичная матрица размерности  $(v-1)*(v-1)$ ,  $Q_1$  - матрица размерности  $(v-1)*(w-z)$ ,  $Q_2$  - матрица размерности  $(v-1)*z$ ,  $z$  - количество обмоток трансформатора (в нашем случае  $z=1$ ).

Для нахождения токов в эквивалентной электрической схеме составим систему алгебраических уравнений, используя законы Кирхгофа. Из первого закона следует, что алгебраическая сумма последовательных переменных ( $J$ -токи), поставленных в соответствие дугам графа, инцидентных любому узлу, принадлежащих любому сечению, равна нулю, т.е.  $AJ=0$  или  $QJ=0$ .

Согласно второму закону Кирхгофа, алгебраическая сумма параллельных переменных ( $U$  - падения напряжений), поставленных в соответствие дугам графа, принадлежащих любому замкнутому циклу, равна нулю, т.е.  $BV=0$ .

Рассмотрим наши переменные. Пусть  $J=\{J_1, J_2, J_T\}$ , где  $J_1$  - токи в ветвях дерева,  $J_2$  - токи в хордах дерева (исключение составляют токи, протекающие в обмотках трансформатора),  $J_T$  - токи в обмотках трансформатора.  $U=\{U_1, U_2, U_T\}$ , где  $U_1$  - падение напряжения в ветвях дерева,  $U_2$  - падение напряжения в хордах дерева (за исключением напряжения на обмотках трансформатора),  $U_T$  - напряжение на обмотках трансформатора. Система уравнений Кирхгофа, с учетом изложенной выше связи между матрицами  $A, Q$ , примет вид:

$$\begin{aligned} J_1 + Q_1 J_2 + Q_2 J_T &= 0 \\ R_2 J_2 - Q_1^T R_1 J_1 &= 0 \\ Q_2^T R_1 J_1 - J_T R &= U_T \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $R$  - активное сопротивление в обмотках трансформатора,  $R_1, R_2$  - диагональные матрицы сопротивлений в ветвях и хордах дерева. Падения напряжения в элементарных объемах (сопротивлениях) определяются согласно закону Ома следующим образом:  $U_1=R_1 J_1, U_2=R_2 J_2$ . При одинаковой температуре всего сыпучего материала значения величин в диагональных матрицах одинаковы и равны элементарному сопротивлению  $r$  при заданной температуре. При различной температуре в зонах нагреваемого сыпучего материала необходимо данные матрицы заполнять с учетом зависимости элементарного сопротивления от температуры. Значения  $J_T, U_T$  считаем заданными.  $Q^T$  - транспонированная матрица. Решив систему алгебраических уравнений (1), находим значения токов в элементах разбиения (например, в кусках) сыпучего материала установки. По значению токов и известным величинам сопротивлений  $r$  определяем, согласно закону Джоуля-Ленца выделяемое тепло в принятых элементарных объемах, то есть, определяем точечные источники тепла  $f(\rho, \varphi, z, t)$ , которые в дальнейшем могут использоваться для численного решения тепловой задачи - распределения температуры по всему объему материала. Для решения системы уравнений (1) необходимо знать величину сопротивления элементов принятого разбиения (некоторого элементарного объема) сыпучего материала.

Предложенная математическая модель определения электрического сопротивления сыпучего материала при его нагреве позволяет провести расчеты общего сопротивления всего объема нагреваемого материала любой геометрической конфигурации. Определяющей величиной при расчетах по предложенной математической модели является значение активного сопротивления между элементарными объемами сыпучего материала. Величина элементарного сопротивления зависит от заданной степени разбиения всего объема нагреваемого сыпучего материала.

Для определения сопротивления элементарных объемов электропроводного сыпучего материала необходимо провести физическое моделирование для простых конфигураций токопроводящего объема исследуемого материала [13]. Можно, например, использовать теоретические и экспериментальные методы, предложенные сотрудниками Института электросварки им. Е.О. Патона под руководством В.И. Лакомского [6-9].

**Примеры математического моделирования.** При однотипности разбиения на элементарные объемы и при условии постоянства температуры во всем объеме сыпучего материала, матрицы  $R_1, R_2$  имеют вид:

$$R_1 = I_1 r(T), R_2 = I_2 r(T), \quad (2)$$

здесь  $I_1, I_2$  единичные матрицы соответствующей размерности (количество ветвей и хорд дерева графа), а  $r(T)$  - активное сопротивление между элементарными объемами при температуре  $T$ . После несложных преобразований системы уравнений (1) следует

$$R = Cr(T) \quad (3)$$

Выражение (3) является обобщенным уравнением переноса (проводимости) для макрообластей гетерогенной системы, где  $C = Q_2^T [I_1 + Q_1 Q_1^T]^{-1} Q_2$  матрица соответствует обобщенному коэффициенту переноса. Матрица  $C$

однозначно определяется структурой графа и зависит только от конфигурации рассматриваемого объема сыпучего материала и степени разбиения на элементарные объемы. Принятые условия (2) представляют собой один из вариантов замыкания уравнений проводимости (3) [11].

При этом из уравнения (3) при условиях (2) однозначно определяются значения токов в ветвях  $J_1$  и хордах  $J_2$  дерева графа через значение измеряемого фазного тока трансформатора  $J_T$ :

$$J = aJ_T,$$

где  $J = \{J_1, J_2\}$ ,  $a = \{a_1, a_2, \dots, a_M^0\}$  значения, определяемые в результате решения системы уравнений (1). В этом случае мощность  $p_i$ , выделяемая в каждом элементарном объеме сыпучего материала, определяется через значение общей мощности  $P$ , потребляемой агрегатом:

$$p_i = rJ_i^2 = a_i^2 P / C. \quad (4)$$

Такой подход позволяет качественно определить распределение выделяемой удельной мощности по всему объему нагреваемого материала при постоянстве температуры в рассматриваемом объеме и принятому способу разбиения на элементарные объемы.

Для примера рассмотрим цилиндрическую конфигурацию нагреваемого материала радиуса  $R$ , высотой  $H$  с тремя симметричными горизонтальными электродами. На электроды подается трехфазное напряжение. Распределение удельной мощности в нагреваемом объеме определяем как для случая с тремя симметричными диэлектрическими перегородками длины  $2/3 R$  и средней толщины  $1/12 R$  в горизонтальной плоскости, так и для случая их отсутствия. Вид ориентированного графа, в случае присутствия перегородок, приведен на рисунке 3.

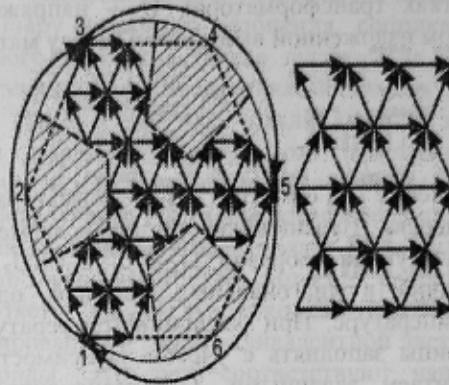


Рисунок 3 - Ориентированный граф

Распределение в процентах удельной мощности по объему нагреваемого материала приведено на рисунках 4 и 5.

Рассматривается случай, когда обмотки трехфазного питающего трансформатора включены треугольником. Из расчетов распределения удельной мощности, потребляемой объемом сыпучего материала в случае отсутствия диэлектрических стенок (рис.4.), видно, что примерно третья часть потребляемой мощности выделяется в окрестности электродов. Это приводит к существенной тепловой нагрузке на футеровку рабочих камер реальных теплотехнических установок в зонах, прилегающих к электродам.

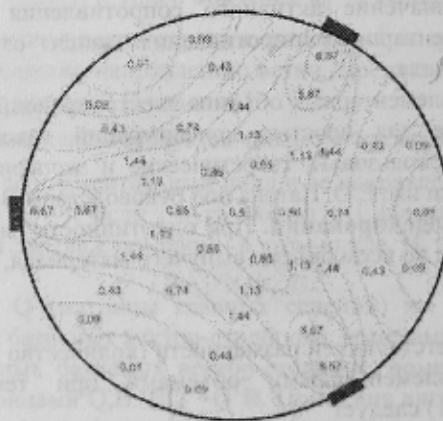


Рисунок 4 - Процентное распределение удельной мощности в объеме нагреваемого материала



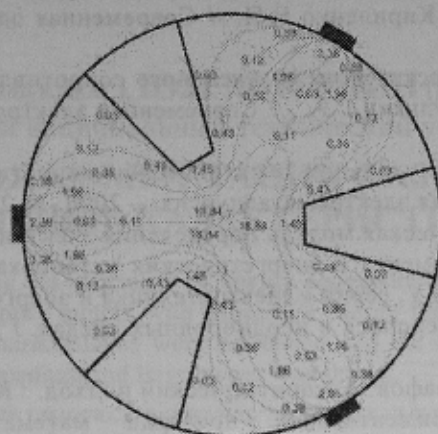


Рисунок 5 - Процентное распределение удельной мощности в случае диэлектрических стенок

Ввод диэлектрических стенок (рис.5) изменяет распределение потребляемой удельной мощности в объеме сыпучего материала. Более 50% потребляемой мощности выделяется в центральной части нагреваемого объема. При этом тепловая нагрузка на зоны, прилегающие к электродам, значительно уменьшается.

**Выводы.** Полученное уравнение (3) из построенной выше математической модели, в случае принятых предположений о постоянстве температуры во всем объеме нагреваемого сыпучего материала и однотипности разбивки на элементарные объемы (2), позволяет сформулировать две задачи:

а) прямая задача - по известным сопротивлениям между элементарными объемами (используются результаты математического и физического моделирования на простых экспериментальных установках) определяется общее сопротивление объекта любой геометрической конфигурации нагреваемого объема (стадия проектирования агрегата);

б) обратная задача - по измеряемым величинам (току и питающему напряжению эксплуатируемого объекта) определяется активное сопротивление между элементарными объемами материала при заданной степени разбивки (для однородного сыпучего материала при  $n \rightarrow \infty$  приходим к задаче определения удельного сопротивления).

Отметим, что обратная задача также позволяет получить качественное распределение (4) удельной мощности по всему объему нагреваемого материала. Распределение удельной мощности зависит как от способа подвода питающего напряжения (место расположения электродов), так и от геометрической конфигурации нагреваемого материала.

Такой подход позволяет:

1) на стадии проектирования пирометаллургических объектов смоделировать необходимую геометрическую конфигурацию рабочего объема агрегата с наперед заданной объемной плотностью выделяемой мощности;

2) на простых экспериментальных установках накопить обширные данные по сопротивлению между элементарными объемами (шарами разного диаметра) и для различного состава сыпучего материала;

Для сопоставления и подтверждения результатов математического моделирования проведены исследования на нескольких экспериментальных установках различной конфигурации нагреваемого объема кокса, различного фракционного состава. Обсуждению полученных результатов посвящена следующая статья.

Авторы выражают благодарность профессору Ковалеву А.П. (ДонНТУ, Донецк) и профессору Гасику М.И. (НМетАУ, Днепропетровск) за обсуждение полученных результатов.

#### Список литературы

1. Максименко М.С. Основы электротермии. / Максименко М.С. - ОНТИ, 1937
2. Диомидовский Б.М. Metallургические печи цветной металлургии. / Диомидовский Б.М. - М.: Metallургиздат, 1961.
3. Струнский Б.М. Руднотермические плавильные печи. /Струнский Б.М. - М.: Metallургия, 1972.
4. Микулинский А.С., Юманова Л.В. К вопросу о прохождении тока в карбидной печи. / Микулинский А.С., Юманова Л.В. // Сб. трудов УНИХИМ, 1954, вып.2, с. 91.
5. Сысоян Г.А. Электрическая дуга в электрической печи. / Сысоян Г.А. - М.: Metallургиздат, 1961.
6. Лакомский В.И. Математическая модель расчета удельного электрического сопротивления зернистого термоантрацита в зависимости от его фракционного состава. / Лакомский В.И. // Современная электрометаллургия. - 2003.- № 4. - С.49-51.

7. Быковец В.В. Удельное электрическое сопротивление кускового термоантрацита в тонком слое. / Быковец В.В., Лакомский В.И., Кириленко В.П. // Современная электрометаллургия. – 2004.-№ 1. – С.47-49.

8. Лакомский В.И. Аналитическая модель удельного сопротивления электропроводного сыпучего материала. / Лакомский В.И., Цыбульский Г.А. // Современная электрометаллургия. – 2005.-№ 1. – С.46-49.

9. Петров Б.Ф. К вопросу об удельном электрическом сопротивлении термоантрацита. / Петров Б.Ф., Лакомский В.И. // Современная электрометаллургия. – 2006.-№ 2. – С.50-53.

10. Вархалев Ю.П. Математическая модель определения электрического сопротивления насыпного материала как нагревательного элемента в энергетических установках / Ю.П. Вархалев Ю.П., Лунова О.В., Тесленко А.И. // Труды ДонНТУ, серия «Электротехника и энергетика», вып.112, 2006, с. 132-137.

11. Дульнев Г.Н. Процессы переноса в неоднородных средах. / Дульнев Г.Н., Новиков В.В. – Л.: Энергоатомиздат, 1991, 248 с.

12. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. / Кристофидес Н. – М.: Мир 1978.

13. Вархалев Ю.П. Экспериментальная проверка математической модели определения электрического сопротивления насыпного материала как нагревательного элемента в энергетических установках/ Вархалев В.Ю., Вархалев Ю.П., Горда В.И., Лунова О.В., Тесленко А.И. // Труды ДонНТУ, серия «Электротехника и энергетика», вып.7(128), 2007, с. 245-248.

Надійшла до редколегії 19.04.2009

Рецензент: О.П. Ковальов

#### **В.Ю. ВАРХАЛЬОВ**

Донецкий национальный технический университет

#### **Ю.П. ВАРХАЛЬОВ**

Донецкий государственный научно-исследовательский институт пластмасс

**Математическая модель определения электрического сопротивления слоя насыпного электропроводного материала.** В статье рассматривается математическая модель определения полного активного сопротивления токопроводящего насыпного материала для различных способов подвода электрической энергии к нагреваемому объему. Принятое разбиение на конечные элементы рабочего объема насыпного материала позволяет однозначно построить эквивалентную электрическую схему, описывающую процессы, которые происходят в агрегатах при прохождении электрического тока. Показан простой алгоритм построения системы уравнений Киргофа для какой-либо конфигурации исходного объема нагреваемого материала. На основе математической модели рассчитывается распределение удельной мощности, который выделяется по всему рабочему объему, при заданной потребляемой мощности агрегата.

*Математическая модель, электрическое сопротивление, слой, насыпной электропроводный материал.*

#### **В.Ю. ВАРХАЛЬОВ**

Донецкий национальный технический университет

#### **Ю.П. ВАРХАЛЬОВ**

Донецкий державний науково-дослідний інститут пластмас

**Математична модель визначення електричного опору шару насипного електропровідного матеріалу.** У статті розглядається математична модель визначення повного активного опору струмопровідного насипного матеріалу для різних способів підводу електричної енергії в об'єм, що нагрівається. Прийняте розбивання на кінцеві елементи робочого об'єму насипного матеріалу дозволяє однозначно побудувати еквівалентну електричну схему, що описує процеси, котрі відбуваються в агрегатах при проходженні електричного струму. Показано простий алгоритм побудовання системи рівнянь Кирхгофа для будь-якої геометричної конфігурації вихідного об'єму матеріалу, що нагрівається. На підставі математичної моделі розраховується розподіл питомої потужності, що виділяється по всьому робочому об'єму, при заданій споживчій потужності агрегату.

*Математична модель, електричний опір, шар, насипний електропровідний матеріал.*