ГЕНЕРАТОР УРАВНЕНИЙ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ МОДЕЛИ СЕТЕВОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Святный В.А., Молдованова О.В.
Кафедра ЭВМ, ДонГТУ
svjatnyj@cs.dgtu.donetsk.ua

Abstract

Svyatnyj V.A., Moldovanova O.V. Equation Generator of Parallel Model of Network Dynamic Object with Distributed Parameters. *The article discusses the problems of mathematical simulation of network dynamic objects with distributed parameters and offers the equation generator as a possible way of their solution. The concept of the equation generator and the specific implementation in the MATLAB language are described.*

1. Введение

Во многих областях техники используются объекты, называемые сетевыми (СО). Примерами СО служат вентиляционные сети, газо- и нефтепроводы, сети водоснабжения, электрические сети и др. Формальное описание СО включает представление их топологии в виде графа с m ветвями и n узлами и уравнения динамических процессов в ветвях и узлах графа. Сетевые объекты относятся к сложным динамическим системам, так как обладают большой размерностью ($m>100$, $n>50$), нелинейностью статических характеристик ветвей и расположенных в них источников энергии, распределенностью параметров, многосвязностью взаимного влияния динамических процессов, иерархичностью уровней управления процессами. Математическое моделирование является практически единственным средством исследования динамических процессов и обеспечения качества проектных решений как по технологическим аспектам функционирования СО, так и по созданию систем управления ими. При построении моделей сетевых объектов с распределенными параметрами возникают задачи безошибочной записи систем уравнений большой размерности, их трудоемкого преобразования к модельным формам, оперативной работы с многомерными массивами параметров СО. В статье предлагается генератор уравнений, решающий эти задачи.

2. Постановка задачи

Рассматривается сетевой аэродинамический объект, топология которого задана графом $G(U, V)$ с множеством узлов $|U| = n$ и ветвей $|V| = m$. Аэродинамические процессы вызываются $w \le m$ вентиляторами, $l<m$ регуляторами и характеризуются векторами расходов $Q = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_m)^T$ и давлений $P = (P_1, P_2, \ldots, P_m)^T$ в ветвях.

В i-ой ветви, рассматриваемой как объект с распределенными параметрами, процессы изменения расхода Q_i и давления P_i описываются системой уравнений:

$$-\frac{\partial p_i}{\partial \xi} = r_i Q_i^2 + \frac{\varrho}{F_i}\frac{\partial Q_i}{\partial t}, \qquad (1)$$

$$-\frac{\partial p_i}{\partial t} = \frac{\varrho a^2}{F_i}\frac{\partial Q_i}{\partial \xi},$$

где r_i – удельное аэродинамическое сопротивление воздуховода, ρ – плотность воздуха, F_i – площадь сечения воздуховода, a – скорость звука в воздухе, ξ – координата, отсчитываемая вдоль оси воздуховода.

Аппроксимируя уравнения (1) по методу прямых, получим для k-го элемента Q_i ветви длиной $\Delta\xi$ уравнения [1]:

$$-\frac{p_{ik}-p_{i,k+1}}{\Delta\xi_{ik}} = r_{ik}Q^2_{ik} + \frac{\varrho}{F_{ik}}\frac{dQ_{ik}}{dt} \tag{2}$$
$$-\frac{dp_{i,k+1}}{dt} = \frac{\varrho a^2}{F_{ik}}\frac{Q_{ik}-Q_{i,k+1}}{\Delta\xi_{ik}}$$

Топологический анализатор сетевого объекта [2] по его исходной кодировке формирует дерево и антидерево графа, вектор $Q = (X,Y)^T$, матрицу инциденций $A(A_XA_Y)$ и матрицу контуров $S(S_XS_Y)$, которые структурированы по подвекторам расходов воздуха в ветвях дерева $X = (X_1, X_2, \ldots, X_{n-1})^T$ и антидерева $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_\gamma)^T$, где $\gamma = m - n + 1$ – цикломатическое число графа. Для ветви как объекта с распределенными параметрами векторы Q, P преобразуются в результате аппроксимации вида (2) в мультивекторную систему, т.е. каждая ветвь X_j ($j = 1\ldots n-1$), Y_q ($q = 1\ldots\gamma$) представляется двумя векторами

$X_j = (X_{j1}, X_{j2}, \ldots, X_{jM})^T$ – поток воздуха в j-ой ветви дерева,

$XP_j = (XP_{j1}, XP_{j2}, \ldots, XP_{jM+1})^T$ – давление в j-ой ветви дерева,

$Y_q = (Y_{q1}, Y_{q2}, \ldots, Y_{qM})^T$ – поток воздуха в q-ой ветви антидерева,

$YP_q = (YP_{q1}, YP_{q2}, \ldots, YP_{qM+1})^T$ – давление в q-ой ветви антидерева,

где M – множество аппроксимирующих элементов в ветвях X_j, Y_q.

Для всего сетевого объекта векторы X, Y, XP и YP трансформируются в матрицы вида

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1M} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2M} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ X_{n-1,1} & X_{n-1,2} & \cdots & X_{n-1,M} \end{bmatrix}; \; XP = \begin{bmatrix} XP_{11} & XP_{12} & \cdots & XP_{1,M+1} \\ XP_{21} & XP_{22} & \cdots & XP_{2,M+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ XP_{n-1,1} & XP_{n-1,2} & \cdots & XP_{n-1,M+1} \end{bmatrix}$$
$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1M} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2M} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ Y_{\gamma,1} & Y_{\gamma,2} & \cdots & Y_{\gamma,M} \end{bmatrix}; \; YP = \begin{bmatrix} YP_{11} & YP_{12} & \cdots & YP_{1,M+1} \\ YP_{21} & YP_{22} & \cdots & YP_{2,M+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ YP_{\gamma,1} & YP_{\gamma,2} & \cdots & YP_{\gamma,M+1} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Элементы матриц (3) вычисляются из следующих уравнений, получаемых из (2) в форме, разрешенной относительно производных по расходам и давлениям:

$$\begin{cases} \dot{X}_{jk} = \alpha_{X_j}(XP_{jk} - XP_{j,k+1}) - \beta_{X_j}X_{jk}\left|X_{jk}\right| \\ X\dot{P}_{j,k+1} = g_{X_j}(X_{jk} - X_{j,jk+1}) \end{cases}$$
$$\begin{cases} \dot{Y}_{qs} = \alpha_{Y_q}(YP_{qs} - YP_{q,s+1}) - \beta_{Y_q}Y_{qs}\left|Y_{qs}\right| \\ Y\dot{P}_{q,s+1} = g_{Y_q}(Y_{qs} - Y_{q,s+1}) \end{cases} \tag{4}$$

Здесь α_{Xj}, α_{Yq}, β_{Xj}, β_{Yq}, g_{Xj}, g_{Yq} – аэродинамические параметры, вычисляемые из (2) по формулам:

$$\alpha_{ik} = \frac{F_{ik}}{\varrho \Delta\xi_{ik}},\ \beta_{ik} = \frac{r_{ik} F_{ik}}{\varrho},\ g_{ik} = \frac{\rho a^2}{F_{ik} \Delta\xi_{ik}} \qquad (5)$$

в соответствии с выбранным числом M и таблицей исходных данных по сети.

Генератор уравнений параллельной модели сетевого объекта должен представлять собой программу, которая на основе необходимых данных при минимальном объеме ручной работы автоматически формирует систему уравнений, решением которой являются элементы матриц (3) – X, XP, Y, YP. При этом в матрицах XP, YP должны быть учтены элементы, являющиеся известными граничными условиями.

3. *Матричное представление системы уравнений сетевого объекта*

Введем обозначения разностей переменных в уравнениях (4) и сформируем матрицы разностей с элементами $\Delta X_{jk} = X_{jk} - X_{j,k+1}$, $\Delta Y_{qs} = Y_{qs} - Y_{q,s+1}$, $\Delta XP_{jk} = XP_{jk} - XP_{j,k+1}$, $\Delta YP_{qs} = YP_{qs} - YP_{q,s+1}$:

$$\Delta X = \begin{bmatrix} \Delta X_{11} & \Delta X_{12} & \cdots & \Delta X_{1,M-1} \\ \Delta X_{21} & \Delta X_{22} & \cdots & \Delta X_{2,M-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \Delta X_{n-1,1} & \Delta X_{n-1,2} & \cdots & \Delta X_{n-1,M-1} \end{bmatrix};\ \Delta Y = \begin{bmatrix} \Delta Y_{11} & \Delta Y_{12} & \cdots & \Delta Y_{1,M-1} \\ \Delta Y_{21} & \Delta Y_{22} & \cdots & \Delta Y_{2,M-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \Delta Y_{\gamma,1} & \Delta Y_{\gamma,2} & \cdots & \Delta Y_{\gamma,M-1} \end{bmatrix};$$

$$\Delta XP = \begin{bmatrix} \Delta XP_{11} & \Delta XP_{12} & \cdots & \Delta XP_{1M} \\ \Delta XP_{21} & \Delta XP_{22} & \cdots & \Delta XP_{2M} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \Delta XP_{n-1,1} & \Delta XP_{n-1,2} & \cdots & \Delta XP_{n-1,M} \end{bmatrix};\ \Delta YP = \begin{bmatrix} \Delta YP_{11} & \Delta YP_{12} & \cdots & \Delta YP_{1M} \\ \Delta YP_{21} & \Delta YP_{22} & \cdots & \Delta YP_{2M} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \Delta YP_{\gamma,1} & \Delta YP_{\gamma,2} & \cdots & \Delta YP_{\gamma M} \end{bmatrix}. \qquad (6)$$

Далее обозначим

$$ZX_{jk} = X_{jk} | X_{jk} |, \qquad (7)$$
$$ZY_{qs} = Y_{qs} | Y_{qs} |$$

и сформируем матрицы ZX и ZY:

$$ZX = \begin{bmatrix} X_{11}|X_{11}| & X_{12}|X_{12}| & \cdots & X_{1M}|X_{1M}| \\ X_{21}|X_{21}| & X_{22}|X_{22}| & \cdots & X_{2M}|X_{2M}| \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ X_{n-1,1}|X_{n-1,1}| & X_{n-1,2}|X_{n-1,2}| & \cdots & X_{n-1,M}|X_{n-1,M}| \end{bmatrix}; \qquad (8)$$

$$ZY = \begin{bmatrix} Y_{11}|Y_{11}| & Y_{12}|Y_{12}| & \cdots & Y_{1M}|Y_{1M}| \\ Y_{21}|Y_{21}| & Y_{22}|Y_{22}| & \cdots & Y_{2M}|Y_{2M}| \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ Y_{\gamma,1}|Y_{\gamma,1}| & Y_{\gamma,2}|Y_{\gamma,2}| & \cdots & Y_{\gamma,M}|Y_{\gamma,M}| \end{bmatrix}.$$

Введя диагональные матрицы аэродинамических параметров α_x, α_y, β_x, β_y, g_x, g_y и применяя матрицы (6), (7), (8), перейдем от (4) к системе дифференциальных уравнений сетевого объекта в компактной матричной форме:

$$\begin{cases} \dot{X} = \alpha_X \Delta XP - \beta_X ZX \\ \dot{XP} = g_X \Delta X \\ \dot{Y} = \alpha_Y \Delta YP - \beta_Y ZY \\ \dot{YP} = g_Y \Delta Y \end{cases} \tag{9}$$

Генератор уравнений должен сформировать все матрицы, входящие в систему (9). Операции над матрицами должны выполняться в последовательности, обеспечивающей формальное определение элементов матриц (3).

4. Формирование граничных условий для уравнений сетевого объекта

Граничные условия для уравнений воздушных потоков в ветвях X, Y делятся на внешние и внутренние. К внешним относятся давления в начальных узлах, чьи ветви соединены с атмосферой, и давления в узлах, к которым подключены вентиляторы. Внутренние граничные условия – это давления в узлах сети, которые должны быть вычислены при решении системы уравнений.

Выделим из матриц XP, YP векторы давлений в начальных (AK) и конечных (EK) узлах:

$$\begin{aligned} XPAK &= (XP_{11}, XP_{21}, \ldots, XP_{n-1,1})^T \\ XPEK &= (XP_{1,M+1}, XP_{2,M+1}, \ldots, XP_{n-1,M+1})^T \\ YPAK &= (YP_{11}, YP_{21}, \ldots, YP_{\gamma,1})^T \\ YPEK &= (YP_{1,M+1}, YP_{2,M+1}, \ldots, YP_{\gamma,M+1})^T \end{aligned} \tag{10}$$

Узлы, которые связаны с атмосферой, имеют значения давления P_A:

$$XP_{j1} = YP_{q1} = P_A \tag{11}$$

Некоторые конечные узлы являются пунктами подключения вентиляторов, характеристики которых определяют давления в этих узлах. Полагая, что вентиляторы подключены к ветвям дерева, заменим соответствующие элементы вектора XPEK на $P_{Vj}(X_{j,M+1})$, т.е.

$$XP_{j,M+1} = P_{Vj} \tag{12}$$

После выполнения (11) и (12) в векторах (10) остаются внутренние граничные условия, которые являются значениями давления в узлах графа. Для этих значений введем вектор P_U:

$$P_U = (P_{U1}, P_{U2}, \ldots, P_{Un-1})^T \tag{13}$$

Общее уравнение для вычисления внутренних граничных условий имеет следующий вид:

$$\dot{P}_U = G((A_X X_U) + (A_Y Y_U)) \tag{14}$$

Здесь

$$G = \begin{bmatrix} g_{U_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_{U_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g_{U_{n-1}} \end{bmatrix} - \tag{15}$$

диагональная матрица параметров типа g_X, g_Y, которые принадлежат ветвям, инцидентным узлам. $A_X X_U$, $A_Y Y_U$ – матрично-векторные операции, которые осуществляются с учетом зависимости элементов векторов X, Y от элементов матриц A_X, A_Y, участвующих в операциях:

$$X_{Ujk} = \begin{cases} X_{kM}, \text{если}\, A_{X_{jk}} = +1 \;(j = 1...n-1; k = 1...n-1) \\ X_{k1}, \text{если}\, A_{X_{jk}} = -1 \end{cases} \tag{16}$$

$$Y_{Uqs} = \begin{cases} Y_{sM}, \text{если}\, A_{Y_{qs}} = +1 \;(q = 1...n-1; s = 1...\gamma. \\ Y_{s1}, \text{если}\, A_{Y_{qs}} = -1 \end{cases}$$

Элементы матрицы G определяются в результате анализа матрицы $A(A_X A_Y)$:

$$g_{Uj} = \begin{cases} g_{X_j}, \text{если первому найденному элементу матрицы A, равному } +1, \\ \qquad \text{соответствует } X_j; \\ g_{Y_q}, \text{если первому найденному элементу матрицы A, равному } +1, \\ \qquad \text{соответствует } Y_q. \end{cases} \tag{17}$$

Последний этап генерирования граничных условий для уравнений сетевого объекта с распределенными параметрами заключается в замещении в матрицах XP, YP граничных элементов, которые определяются уравнением (14). Для решения этой задачи используется тот факт, что в матрице $A(A_X A_Y)$ есть строка U_j, для которой давление P_{Uj} является условием начального или конечного узла. Например, $A_{jk} = +1 (A_{jk} = -1)$ означает, что P_{Uj} для соответствующего X_{jk} есть конечное граничное условие (начальное граничное условие) и может быть использовано вместо соответствующего элемента $XP_{j,M+1}$ (XP_{j1}). Точно так же эти правила действуют и для $A_{qs} = +1 (A_{qs} = -1)$, разрешается замещать элементы $YP_{q,M+1}$ (YP_{q1}) на P_{Uj}. Генератор выполняет на этом этапе следующие операции:

- создание матрицы AP_U на основе матрицы инциденций $A(A_X A_Y)$. В AP_U вместо элементов −1, +1 используются элементы P_{Uj};
- создание матрицы A-XPYP на основе матрицы инциденций $A(A_X A_Y)$. Элементы этой матрицы получаются при замене +1, −1 (матрица A) на элементы из первого и последнего столбцов матриц XP, YP (+1 – элементы из последнего столбца $XP_{j,M+1}$, $YP_{q,M+1}$; −1 – элементы из первого столбца XP_{j1}, YP_{q1}; при этом $j = 1\ldots n\text{-}1$, $q = 1\ldots\gamma$);
- замещение элементов XP_{j1}, YP_{q1}, $XP_{j,M+1}$, $YP_{q,M+1}$ матриц XP, YP соответствующими элементами матриц A-XPYP, AP_U.

5. Имплементация генератора уравнений

Проблемно ориентированная параллельная моделирующая среда для сетевого объекта с распределенными параметрами может быть реализована в распределенной вычислительной системе (ВС), содержащей SISD-, SIMD- и MIMD-системы [3]. Поэтому генератор уравнений имплементируется в трех указанных типах ВС.

Создание матриц X, Y, XP, YP, α_x, α_y, β_x, β_y, g_x, g_y

↓

Формирование матриц ΔX, ΔY:

$$\Delta X_{jk} = X_{jk} - X_{j,k+1},$$
$$\Delta Y_{qs} = Y_{qs} - Y_{q,s+1}$$

↓

Формирование матриц ZX, ZY:

$$ZX_{jk} = X_{jk}|X_{jk}|,$$
$$ZY_{qs} = Y_{qs}|Y_{qs}|$$

↓

Выделение векторов граничных условий:

$$XPAK = (XP_{11}, XP_{21}, \ldots, XP_{n-1,1})^T$$
$$XPEK = (XP_{1,M+1}, XP_{2,M+1}, \ldots, XP_{n-1,M+1})^T$$
$$YPAK = (YP_{11}, YP_{21}, \ldots, YP\gamma_{,1})^T$$
$$YPEK = (YP_{1,M+1}, YP_{2,M+1}, \ldots, YP\gamma_{,M+1})^T$$

↓

Формирование диагональной матрицы G

↓

$$Xu = AxX$$
$$Yu = AyY$$

↓

Вычисление вектора внутренних граничных условий:

$$Pu = G(Xu+Yu)$$

↓

Формирование вспомогательной матрицы APu

↓

Формирование вспомогательной матрицы A-XPYP

↓

Замещение элементов XP_{j1}, YP_{q1}, $XP_{j,M+1}$, $YP_{q,M+1}$ матриц XP, YP соответствующими элементами матриц APu и A-XPYP

↓

Формирование матриц ΔXP, ΔYP:

$$\Delta XP_{jk} = XP_{jk} - XP_{j,k+1},$$
$$\Delta YP_{qs} = YP_{qs} - YP_{q,s+1}$$

Рис.1. Блок-схема алгоритма генератора уравнений

По алгоритму, блок-схема которого приведена на рис.1, базовой имплементацией является программирование и отладка предложенных алгоритмов в среде MATLAB, реализованной в SISD-системах. В программе использованы встроенные функции и операторы MATLAB для работы с одно- и многомерными массивами.

Для вычислительной системы SIMD-типа используется язык PARALLAXIS с эффективным параллельным выполнением всех векторно-матричных операций. Главный процессор (HOST) выполняет операции, которые невозможно распараллелить.

В случае с MIMD-системой последовательные операции выполняются на выбранном ведущем процессоре, например, процессоре с номером 0. Остальные процессоры используются для операций, которые можно выполнять параллельно.

Генератор был опробован на тестовом примере сетевого динамического объекта с распределенными параметрами, граф которого содержит 4 ветви дерева (X_1, X_2, X_3, X_4), 4 ветви антидерева (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) и 5 узлов. Узел P_A соединен с атмосферой, а узел P_V подсоединен к вентилятору.

Исследования показали, что предложенный алгоритм формирует все матрицы и векторы, представляющие систему уравнений сетевого объекта. По желанию разработчика моделей они визуализируются и документируются.

Заключение

Генератор, предложенный в данной статье, позволяет безошибочно и быстро формировать матрично-векторные уравнения, описывающие сетевой динамический объект с распределенными параметрами. По уравнениям могут быть построены модели, реализуемые в вычислительных системах SISD-, SIMD- и MIMD-структур.

Литература

1. Абрамов Ф.А., Фельдман Л.П., Святный В.А., Моделирование динамических процессов рудничной аэрологии. – Киев: Наук. думка, 1981. – 284 с.

2. Перерва А.А. Топологический анализатор параллельной модели сетевого объекта. – Научные труды ДонГТУ, серия «Информатика, кибернетика, вычислительная техника», вып. 6, 1999, с. 73-78.

3. Святный В.А. Проблеми паралельного моделювання складних динамічних систем. – Наукові праці ДонДТУ, серія «Інформатіка, кібернетика, обчислювальна техніка», вип. 6, 1999, с. 6–14.