УДК 004.925.8

ГЕНЕРАЦІЯ ОКРУЖНОСТІ ДЛЯ 3-D ДИСПЛЕЇВ

Мілютін М.О., Аль-Орайкат Анас Махмуд, Авксентьева О.А.
Донецкий национальный технический университет

Велика увага в напрямку розвитку систем відображення інформації зараз приділяється методам побудови 3-D дисплеїв. В них, крім пристрою відображення трьохмірної інформації, передбачається використання генераторів трьохмірних графічних примітивів, які повинні трансформувати елементарні складові частини сцени – графічні примітиви (точки, відрізки, окружності, плоскості і т.д.) у множину елементарних об'єктів відображення (вокселів). Для 2-D систем відображення розроблено забагато методів, алгоритмів та апаратури для генерації 2-D графічних примітивів [1, 2], але у 3-D випадку вони практично відсутні. В роботі розглядається один з можливих підходів до побудови генератору 3-D довільних окружностей та дуг.

Растр 3–D дисплею складається з вокселей. Воксель – це атомарний елемент, який відображається дисплеєм і має три координати розташування – X, У та Z. Координати X, Y, Z змінюються лінійно від 1 до R з кроком 1, де R – ціле число, максимальний індекс вокселя по одній координаті. З геометричної точки зору один воксель це куб з ребрами рівними одиниці.

Для універсальності алгоритму генерації 3-D окружності будемо розглядати коло, як випадок дуги у 360 градусів. Визначимо початкові дані, необхідні для генерації дуги. По-перше, потрібна початкова точка з якої починається дуга. Нехай це точка N, яка має координати X_N, Y_N, Z_N. По-друге, точка що визначає центр кола, якому належить дуга – точка C з координатами, відповідно: X_C, Y_C, Z_C. По-третє, кут **α**, який визначає кутову довжину дуги. Дуга повинна бути задана в просторі, тому необхідно визначити плоскість в якій вона лежить. Згідно з [3], плоскість може бути проведена через три точки, які не лежать на одній прямій. Дві точки дуги, які лежать у цій плоскості – це N та C. Потрібна ще одна додаткова точка, яка буде однозначно визначати плоскість. Нехай це буде довільна точка P, яка має координати X_P, Y_P, Z_P і належить плоскості. Відповідно, маємо трикутник CNP, що визначає плоскість в якій лежить дуга. Таким чином можна однозначно задати довільну дугу у 3-D просторі (рис.1).

Визначимо кожен з параметрів, необхідних для генерації дуги:

- R дорівнює відстані між точками C та N і визначається по формулі:

$$R = \sqrt{(x_N - x_C)^2 + (y_N - y_C)^2 + (z_N - z_C)^2}\,; \tag{1}$$

- Плоскість CNP задається рівнянням:

$$Ap \cdot (x - x_C) + Bp \cdot (y - y_C) + Cp \cdot (z - z_C) = 0, \tag{2}$$

де: Ap, Bp, Cp – це координати нормального вектора $\overrightarrow{n_P}$ плоскості CNP,

$(x; y; z)$ – координати будь-якої невідомої точки, яка лежить на плоскості,

$(x_C; y_C; z_C)$ – координати відомої точки, яка лежить на плоскості, тобто координати центра окружності, R – радіус дуги, а K – кінцева точка генерації дуги з координатами $(x_K; y_K; z_K)$.

Координати нормального вектора n_P визначаються виходячи з того, що нормальний вектор є перпендикуляром до плоскості. Таким чином він має бути перпендикулярний векторам $\overrightarrow{CN}$ та $\overrightarrow{CP}$ (рис. 2.), які лежать на плоскості CNP. Вектор перпендикулярний двом іншим є векторним добутком цих векторів, тобто вектор $\overrightarrow{n_P}$ є векторним добутком векторів $\overrightarrow{CN}$ та $\overrightarrow{CP}$.

Визначив векторний добуток $\overrightarrow{CN}$ та $\overrightarrow{CP}$ отримаєм координати нормального вектора:

де вектори $\overrightarrow{CN}$ та $\overrightarrow{CP}$ мають наступні координати:

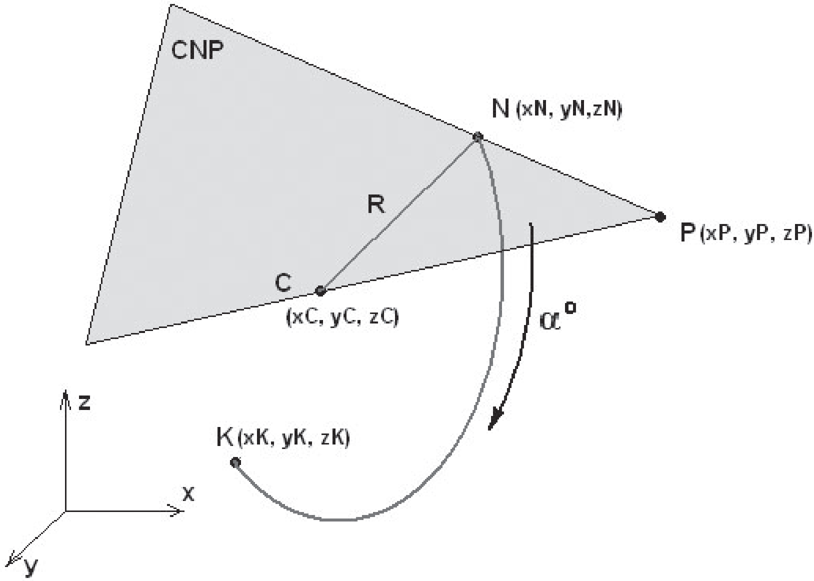

Рисунок 1 – Дуга з початковими параметрами

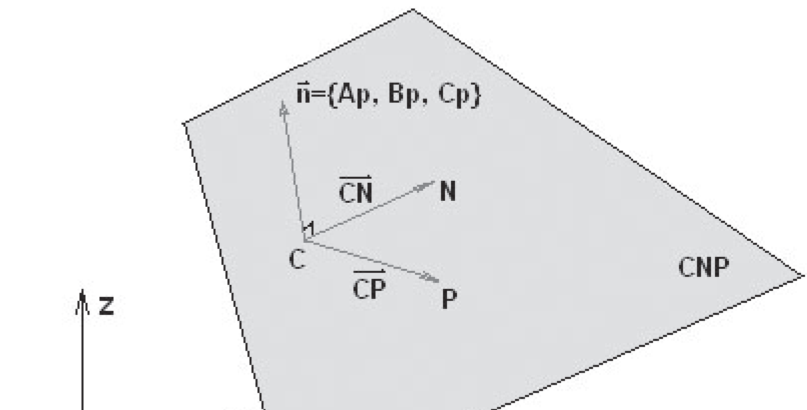

Рисунок 2 – Визначення нормального вектора площості CNP

$$\begin{aligned} Ap^* &= y_{CN} \cdot z_{CP} - y_{CP} \cdot z_{CN}, \\ Bp^* &= z_{CN} \cdot x_{CP} - z_{CP} \cdot x_{CN}, \\ Cp^* &= x_{CN} \cdot y_{CP} - x_{CP} \cdot y_{CN}. \end{aligned} \tag{3}$$

Для визначення координат кінцевої точки треба скласти систему рівнянь. Розглянемо умови, які повинні задовольнятися

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CN} &= \{x_N - x_C, \quad y_N - y_C, \quad z_N - z_C\} = \{x_{CN}, \quad y_{CN}, \quad z_{CN}\}, \\ \overrightarrow{CP} &= \{x_P - x_C, \quad y_P - y_C, \quad z_P - z_C\} = \{x_{CP}, \quad y_{CP}, \quad z_{CP}\}. \end{aligned} \tag{4}$$

для визначення координат точки K. По-перше, точка K повинна лежати у плоскості CNP, тобто повинно виконуватися рівняння (2), яке модифікується у наступне:

$$Ap \cdot (x_K - x_C) + Bp \cdot (y_K - y_C) + Cp \cdot (z_K - z_C) = 0 \tag{5}$$

По-друге, відстань між точкою центра окружності і кінцевою повинна дорівнювати радіусу R. Тобто,

$$\sqrt{(x_K - x_C)^2 + (y_K - y_C)^2 + (z_K - z_C)^2} = R \tag{6}$$

Потрібно ще одне третє рівняння, так як 3 невідомих змінних. Відстань між точками K та N дорівнює розміру вектора NK, який визначається з тригонометричних відношень у прямокутному трикутнику і дорівнює

$$NK = 2 \cdot R \cdot \sin\frac{\alpha}{2}. \tag{7}$$

Таким чином отримали наступне рівняння:

$$\sqrt{(x_K - x_N)^2 + (y_K - y_N)^2 + (z_K - z_N)^2} = NK \tag{8}$$

З рівнянь (3), (4) та (5) отримали систему рівнянь для визначення кінцевої точки. Для спрощення обчислювань звільнили вирази з-під корня:

$$\begin{cases} Ap\cdot(x_K - x_C) + Bp\cdot(y_K - y_C) + Cp\cdot(z_K - z_C) = 0 \\ (x_K - x_C)^2 + (y_K - y_C)^2 + (z_K - z_C)^2 = R^2 \\ (x_K - x_N)^2 + (y_K - y_N)^2 + (z_K - z_N)^2 = NK^2 \end{cases} \tag{9}$$

Алгоритм генерації окружності вибирає оптимальні вокселі для відображення. При переході від попереднього вокселя маємо сім вокселів-претендентів для переходу до наступного. Вокселі-претенденти визначаються в залежності від напрямку дотичної до кола в поточній точці. Кожна з координат вокселів-претендентів може відрізнятися від координат попереднього векселя лише на одиницю чи не відрізнятися своє значення. Остаточна зміна координат (вибір наступного вокселя) залежить від відстані між дійсним розташуванням окружності й найближчими координатами сітки 3-D растру. Цю відстань можна визначити за допомогою двох ознак. Перша – це відстань від центра кола до центру векселя, який є претендентом, за винятком радіусу, друга – розмір перпендикуляра, що опущено на плоскість CNP з тієї ж точки.

Для забезпечення однаковості генерації дуги в прямому та зворотньому напрямку, пропонується визначати вокселі, починаючи як з початкової точки дуги, так і з кінцевої. Таким чином, маємо два поточні вокселя, які рівномірно наближуються один до одного за напрямками своїх дотичних. Алгоритм закінчується тоді, коли ці вокселі “зустрічаються”.

Розроблена експериментальна програма тестування запропонованого алгоритму. Програма генерує 3-D представлення кола чи дуги та відображує отриману множину вокселів, використовуючи звичайний дисплей, та також визначає максимальну похибку генерації окружності чи дуги. Приклад генерації дуги наведено на рис.3.

Аналіз результатів роботи експериментального програмного генератору показав, що запропонований алгоритм генерує окружність з помилкою не більшою за 0,72 від сторони векселя, що менш ніж половина діагоналі векселя $0{,}5*3^{-2} = 0{,}86$. Тобто похибка менш ніж максимально можлива для моніторів з растровим представленням візуальної інформації.

Література

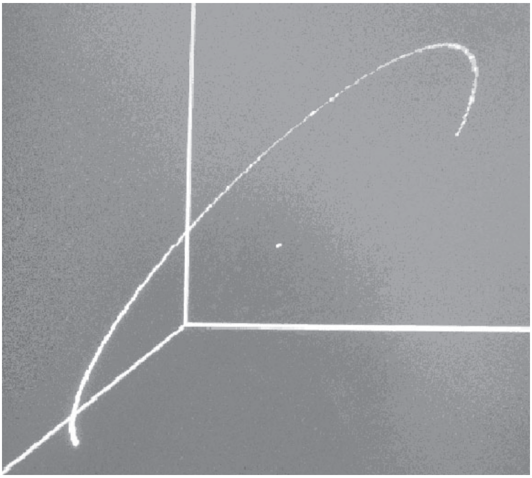

Рисунок 3 – Приклад генерації дуги ($\boldsymbol{\alpha} = 217.8^0$)

[1] Роджерс Д. Алгоритмические основы машинной графики. — Пер. с англ. — Москва.: «Мир», 1989. — 512 с.
[2] Дружинин А.И., Вихман В.В. Алгоритмы компьютерной графики. Учеб. пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2003. – 47 с.
[3] Беклемишев Д.В., Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1980.