

Распределение ресурсов с вложением части прибыли

Постановка задачи: Планируется деятельность отраслей А и В на 4 года. Начальные ресурсы S_0 составляют 10000. Средства x , вложенные в отрасль А в начале года, дают в конце года прибыль $0,6x$ и возвращаются в размере $0,7x$; аналогично для отрасли В функции равны $0,5x$ и $0,8x$. В конце каждого года 5% прибыли вкладывается в развитие производства, а остальные средства заново перераспределяются между отраслями А и В. Требуется распределить средства между двумя отраслями производства на 4 года так, чтобы прибыль оказалась максимальной.

Решение задачи:

$$\text{Уравнение состояний: } S_k = 0,7x_k + 0,8(S_{k-1} - x_k) = 0,8S_{k-1} - 0,1x_k$$

Если учесть часть прибыли (5%) имеем новое уравнение состояний:

$$S_k = 0,8S_{k-1} - 0,1x_k + 0,05(0,5S_{k-1} + 0,1x_k) = 0,825S_{k-1} - 0,095x_k$$

Суммарный показатель эффективности – целевая функция – прибыль за 4 года:

$$Z = \sum_{k=1}^4 0,5S_{k-1} + 0,1x_k. \text{ На последнем шаге функциональное уравнение:}$$

$$Z_4^*(S_3) = \max \{0,5S_3 + 0,1x_4\}, 0 \leq x_4 \leq S_3. \text{ Проводим условную оптимизацию.}$$

IV шаг. Пусть $Z_4 = 0,5S_3 + 0,1x_4$. Это линейная возрастающая функция, следовательно, $Z_4^*(S_3) = 0,1S_3 + 0,5S_3 = 0,6S_3$ и $x_4^*(S_3) = S_3$

III шаг.

$$Z_3^*(S_2) = \max \{0,1x_3 + 0,5S_2 + 0,6S_3\} = \max \{0,995S_2 + 0,043x_3\}, 0 \leq x_3 \leq S_2$$

Максимум достигается при $x_3 = S_2$, т.е. $Z_3^*(S_2) = 1,038S_2$ и $x_3^*(S_2) = S_2$.

II шаг. Из уравнения состояния

$$Z_2^*(S_1) = \max \{0,5S_1 + 0,1x_2 + 1,038S_2\} = \max \{1,406S_1 + 0,00139x_2\}, 0 \leq x_2 \leq S_1$$

$$Z_2^*(S_1) = 1,40739S_1 \text{ и } x_2^*(S_1) = S_1$$

I шаг. $S_1 = 0,825S_0 - 0,095x_1$, следовательно,

$$Z_1^*(S_0) = \max \{0,5S_0 + 0,1x_1 + 1,40739S_1\} = \max \{1,66S_0 + 0,034x_1\}, 0 \leq x_1 \leq S_0$$

$$Z_1^*(S_0) = 1,694S_0 \text{ и } x_1^*(S_0) = S_0.$$

Итак, $Z_{\max} = Z_1^*(10000) = 16940$. $x_1^* = 10000$; $y_1^* = 0$ (все средства выделяются отрасли А). $S_1^* = 7300$, следовательно, $x_2^* = 7300$; $y_2^* = 0$ (все средства выделяются отрасли А). $S_2^* = 6716$, следовательно, $x_3^* = 6716$; $y_3^* = 0$ (все средства выделяются отрасли А). $S_3^* = 6178,72$; следовательно, $x_4^* = 6178,72$; $y_4^* = 0$ (все средства выделяются отрасли А).

Вывод: оптимальная прибыль за 4-е года, полученная от двух отраслей производства равна 16940 ед. при условии, что 5% прибыли всегда вкладывается в расширение производства и отрасль А получает по годам (10000;7300;6716;6178,72), а отрасль В – (0;0;0;0).