УДК 621.3.003

О.П. ЛЮТИЙ [1] (канд.техн.наук), **Е. Г. КУРІННИЙ** [2] (д-р техн.наук, проф.)
[1] **ВАТ «Дніпроспецсталь»**
[2] **Державний вищий навчальний заклад «Донецький національний технічний університет»**
lyuty@dss.com.ua, n8400@matrixhome.net

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН ОБ'ЄМУ ВИПУСКУ ПРОДУКЦІЇ І ВИТРАТ ЕНЕРГОНОСІЇВ

Розглядається система величин випуску продукції і витрат енергоносіїв у їх взаємозв'язку. Пропонується спосіб виключення анормальних дослідних значень при визначенні параметрів багатовимірного нормального розподілу.

Випуск продукції, електроспоживання, кореляція, стаціонарний режим.

Постановка задачі. Для розв'язання задач енергозбереження потрібно мати математичну модель системи випадкових величин об'єму V випуску продукції і витрат енергоносіїв (електроенергії W, газу, тепла, тощо) у їх взаємозв'язку – у рамках інтегральної енергетики [1]. Ця модель повинна відповідати режиму стабільної продуктивності, що потребує виключення з розглядання випадків недовипуску продукції і перевитрат енергоносіїв, які викликані затримками і порушеннями технологічного процесу.

На сьогодні таку задачу розв'язано лише для граничних випадків: відсутності кореляції між V і W [2] і функціональному лінійному зв'язку між випуском продукції і енергоносіями [3]. Метою статті є розробка загальної математичної моделі, яка враховує кореляційні зв'язки. Для короткості викладання дається на прикладі вугільної шахти [3], але всі результати розповсюджуються і на інші об'єкти та окремі технологічні лінії.

Формування масиву даних. Вихідними даними є дослідні значення (знак ~) випуску продукції $\tilde{V}$ і витрат енергоносіїв, які реєструються через визначенні проміжки часу: тривалості циклів технологічних процесів, годин, діб. Розглянемо спочатку два параметри режиму: випуск продукції і витрати електроенергії. Як приклад, на рис. 1 світлими кружками показані дослідні точки, координати яких у відносних одиницях взято з третього і четвертого стовпців табл. 1 з [3]. Середні значення становлять: $\tilde{V}_c = 0,731$ і $\tilde{W}_c = 0,955$ (точка $\tilde{M}$), а стандарти: $\tilde{\sigma}_V = 0,177$ і $\tilde{\sigma}_W = 0,03$.

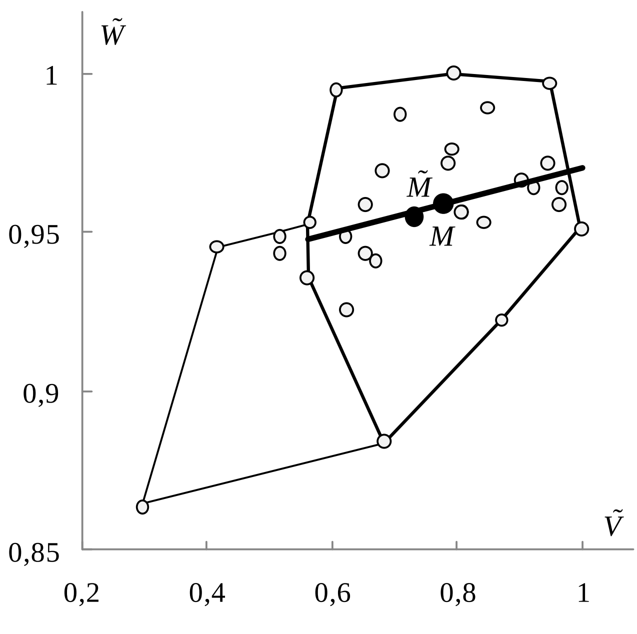

Рисунок 1 – Дослідні дані випуску вугілля і витрат електроенергії

Наявність великої кількості факторів, що впливають на параметри режиму, дозволяє вважати випадкові величини V і W нормальними. Проте незакономірні відхилення від технологічного режиму (простої або, навпаки, необгрунтована інтенсифікація) порушують нормальність розподілів. Для розробки математичної моделі потрібно виключити або скорегувати такі відхилення.

Процес випуску продукції є визначальним для витрат енергоносіїв, тому, як і в [2, 3], приймемо, що великі значення $\tilde{V}_+$ відповідають умові нормальності. Проте на відміну від [2, 3] середнє значення $V_c^{(1)}$, яке обирається за значенням 0,5 функції розподілу, будемо вважати першим наближенням. Окрім того, масив даних з меншими значеннями випуску продукції не будемо корегувати, а виключимо з нього анормальні точки.Звичайно [4] сукупність анормальних точок виключається шляхом порівняння її середнього значення зі середнім значенням решти масиву: якщо ймовірність їх розходження є дуже великою. Однак при цьому потрібно задавати цю ймовірність, що створює невизначеність. Оскільки відомим є перше наближення для середнього значення, то, починаючи з найменшого значення випуску, послідовно будемо виключати дослідні точки до тих пір, доки середнє значення масиву, що залишається, не буде близьким до $V_{\text{c}}^{(1)}$. Якщо останні точки мають однакові значення $\tilde{V}$, а слід виключити тільки частину з них, то виключаються точки з більшими витратами електроенергії. За отриманим масивом визначаються теоретичні значення параметрів розподілу: середні значення, стандарти і коефіцієнт кореляції r між попарно взятими випадковими величинами.

У розглянутому прикладі $V_{\text{c}}^{(1)} = 0,78.$ Виключаючи з першої до четвертої точки з $\tilde{V} = 0,2941;$ $0,4164;$ $0,5139$ ³ $0,5139,$ послідовно отримаємо зростаючі з 0,731 середні значення: 0,746; 0,758; 0,767 і 0,777. Якщо ще виключити й п'яту точку 0,5604, то середнє значення 0,785 вже буде більшим за 0,78. Тому остаточно залишаємо масив $\tilde{V}$ з 26 точок замість 30 з відповідними значеннями витрат електроенергії (потовщені лінії на рис. 1). Для цього масиву V_{c} = 0,777; σ_V = 0,1372; W_{c} = 0,9547; σ_W = 0,0297; r_{VW} = 0,271. Точка M з координатами (0,777; 0,9547) змістилася праворуч майже паралельно вісі абсцис. Мале значення коефіцієнта кореляції пояснюється наявністю постійної складової витрат електроенергії (на вентиляцію, водовідлив, тощо).

Порівняємо отримані дані з результатами [3], де V_{c} = 0,78; σ_V = 0,124; W_{c} = 0,9594; σ_W = 0,0067; r_{VW} = 1. Як бачимо, середні значення практично не відрізняються, стандарти є значно меншими: 0,124 проти 0,1372 і 0,0067 проти 0,0297, коефіцієнт кореляції 1 проти 0,271 – значно більшим. Це свідчить про необхідність врахування фактичного коефіцієнта кореляції – навіть коли функція питомих витрат добре апроксимується виразом (12) з [3].

Математична модель. У загальному випадку системи n випадкових величин $x_1 = V,\ x_2 = W,\ x_3, ..., x_n$ маємо по n середніх значень, стандартів та визначник n-го порядку

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & ... & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & ... & r_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ r_{n1} & r_{n2} & ... & 1 \end{vmatrix},$$

де $r_{\mu\nu} = r_{\nu\mu}$ при $\mu,\ \nu = 1, 2, ..., n.$ Позначивши через

$$\Pi_\mu = \frac{x_\mu - x_{\tilde{n}\mu}}{\sigma_\mu}, \qquad \Pi_\nu = \frac{x_\nu - x_{\tilde{n}\nu}}{\sigma_\nu},$$

запишемо спільну щільність розподілу

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} \sigma_i \sqrt{(2\pi)^n D}} \exp\left\{-\frac{1}{2D} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} D_{\mu\nu} \Pi_\mu \Pi_\nu \right\}, \tag{1}$$

де $D_{\mu\nu}$ – алгебраїчне доповнення елемента $r_{\mu\nu}$ визначника Δ_n.

Якщо будь-який коефіцієнт кореляції за абсолютним значенням є меншим 0,1, то його можна приймати рівним нулю, а відповідні параметри режиму розглядати незалежно від інших. Навпаки, при великому коефіцієнті (більшому за 0,9) приблизно вважається, що він дорівнює одиниці. При цьому параметри режиму будуть зв'язані лінійними залежностями, а тому достатньо розглядати лише один з них.

Для практичних цілей звичайно буває достатнім розглядати двовимірні розподіли для випуску продукції і окремо кожного енергоносія. Наприклад, для системи V і W спільна щільність

$$f\left(V, W\right) = \frac{1}{2\pi\sigma_V\sigma_W\sqrt{1 - r_{VW}^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\left(1 - r_{VW}^2\right)}\left[\Pi_V^2 - 2r_{VW}\Pi_V\Pi_W + \Pi_W^2\right]\right\}. \tag{2}$$

Однією з задач практики є визначення допустимого діапазону значень витрат електроенергії для отриманого об'єму продукції. Для її розв'язання використовується умовний закон розподілу, який є нормальним із середнім значенням

$$W_{\text{c}|V} = W_{\text{c}} + r_{VW}\left(V - V_{\text{c}}\right)\sigma_W / \sigma_V = W_{\text{c}} + r_{VW}\Pi_V\sigma_W \tag{3}$$

і стандартом

$$\sigma_{W|V} = \sigma_W\sqrt{1 - r_{VW}^2}. \tag{4}$$

Умовне середнє значення залежить від V (пряма на рис. 1), а стандарт – ні. Щільність умовного розподілу

$$f\left(V|W\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{W|V}}\exp\left\{-\frac{\left(W-W_{\text{ñ}|W}\right)^2}{2\sigma_{W|V}^2}\right\}. \tag{5}$$

Область однакових значень щільності (2) є еліпсом, який описується рівнянням

$$\Pi_V^2-2r_{VW}\Pi_V\Pi_W+\Pi_W^2=\beta^2, \tag{6}$$

в яке входить постійна величини β, смисл якої з'ясуємо пізніше. У математичній літературі представлення еліпсу в осях x і y дається за умов однакової розмірності випадкових величин x і y, а також однакових масштабів цих осей (наприклад, формули (9.2.2) і (9.2.4) в [5]). Величини V і W мають різні розмірності, тому еліпс доцільно будувати в осях Π_V і Π_W, які не мають розмірності.

Середні значення величин Π_V і Π_W дорівнюють нулю, а стандарті $\sigma_{\Pi V}=\sigma_{\Pi W}=1$. Тому кут α повороту осей ξ і η симетрії еліпсу згідно з формулою (9.2.2) в [5] становить

$$\alpha=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2r_{VW}\sigma_{\Pi V}\sigma_{\Pi W}}{\sigma_{\Pi V}^2-\sigma_{\Pi W}^2}=\pm 45°,$$

де знак плюс (мінус) береться при $r > 0$ ($r < 0$). Від значення коефіцієнта кореляції кут не залежить, але на форму еліпсу це значення вливає. Так, на осях ξ і η еліпс відсікає відрізки (при $r \neq 0$ або $r \neq \pm 1$)

$$a=\pm\frac{\beta}{\sqrt{1-r}},\qquad b=\pm\frac{\beta}{\sqrt{1+r}}. \tag{7}$$

Рівняння еліпсу в осях ξ і η має канонічний вигляд

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}=1,\qquad -a\le\xi\le a,\qquad -b\le\eta\le b, \tag{8}$$

а між координатами точок в системі координат Π_V,Π_W і ξ,η існують співвідношення

$$\begin{aligned}&\Pi_V=\left(\xi-\eta\right)\big/\sqrt{2}, &&\Pi_W=\left(\xi+\eta\right)\big/\sqrt{2},\\ &\xi=\left(\Pi_V+\Pi_W\right)\big/\sqrt{2}, &&\eta=\left(\Pi_W-\Pi_V\right)\big/\sqrt{2}.\end{aligned} \tag{9}$$

На осях Π_V і Π_W еліпс відсікає однакові відрізки $\pm\beta\sigma_{\Pi V}=\pm\beta\sigma_{\Pi W}=\pm\beta$, які є півосями еліпсу. Для побудування еліпсу у цих осях використовується формула (при зміні абсцис від $-\beta\big/\sqrt{1-r^2}$ до $\beta\big/\sqrt{1-r^2}$):

$$\Pi_W=r_{VW}\Pi_V\pm\sqrt{\beta^2-\left(1-r_{VW}^2\right)\Pi_V^2}$$

Області розрахункових режимів. Одним з основних принципів застосування теорії ймовірностей є принцип практичної впевненості [5]. Для однієї окремо взятої випадкової величини згідно з цим принципом враховуються не всі можливі значення, а тільки практично вірогідні. Ймовірність E_x появи значень за кожною межею розрахункового діапазону приймають дуже малою. Звичайно E_x = 0,05, а ймовірність E_R знаходження у діапазоні дорівнює 1 – 2E_x = 0,9. Межі діапазону зручно розраховувати за формулами:

$$V_{\max,\min}=V_{\text{c}}\pm\beta\sigma_V,\qquad W_{\max,\min}=W_{\text{c}}\pm\beta\sigma_W, \tag{10}$$

де статистичний коефіцієнт β визначається через E_x. Саме цей коефіцієнт використовується в (6). Для величин Π_V і Π_W межі є однаковими:

$$\Pi_{V\max,\min}=\Pi_{W\max,\min}=\beta. \tag{11}$$

При E_x = 0,05 для нормального розподілу β = 1,65.

Для системи нормальних величин в [6] проаналізовано два способи визначення області вірогідних подій.

Для короткості розглянемо спосіб «рівної щільності», який дає еліпс (6). Згідно з [5] ймовірність E_R дорівнює $1-\exp\{-\beta^2/2\}$. При β = 1,65 ймовірність E_R = 0,744, що значно менше за 0,95 для однієї випадкової величини.

На рис. 2 показано область розрахункового режиму при β = 1,65, а також дослідні точки без перших чотирьох. Деякі точки знаходяться за межами еліпсу. Це пояснюється тим, що вибір розрахункового масиву виконувався лише відносно однієї випадкової величини V – проекції цих точок на ось Π_V не виходять за межі (11). З точки зору електрозбереження бажаною є затушована область четвертого квадранту в осях Π_V і Π_W з великим випуском продукції і малими витратами електроенергії.

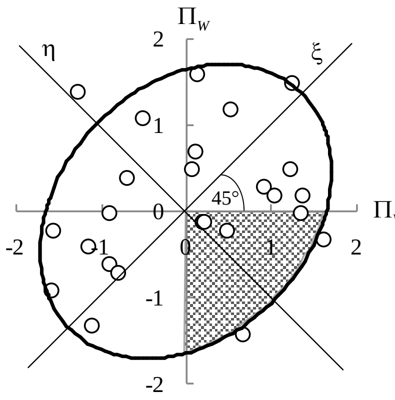

Рисунок 2 – Еліпс рівної ймовірності

При спостереженому значенні випуску продукції принцип практичної впевненості дає вірогідний діапазон, а не еліпс. З врахуванням формул (3), (4) і (10) границі діапазону

$$W_{\max,\min}|V = W_c + \left(r_{VW}\Pi_V \pm \beta\sqrt{1-r_{VW}^2}\right)\sigma_W. \quad (12)$$

Теоретично можна визначити n-вимірні області для системи випадкових величин (при n = 3 – еліпсоїд), але для практичних цілей достатньо використовувати еліпси попарно взятих величин у порядку їх суттєвості. Наприклад, при виробництві аміаку спочатку розглядається масив V і витрат газу, потім V і W, а у електросталеплавильному виробництві – навпаки.

Висновки.

У стаціонарному режимі виробництва об'єм випуску продукції і витрат електроенергії являють собою систему нормально розподілених випадкових величин, параметри якої визначаються по дослідних даних за виключенням значень, «що випадають». Це рекомендується здійснювати шляхом послідовного виключення даних з малим випуском продукції – до тих пір, доки середнє значення випуску продукції ще буде меншим за значення, яке відповідає ординаті 0,5 статистичної функції розподілу випуску продукції.

ЛІТЕРАТУРА

1. Шидловский А.К. Интегральная энергетика. Принцип практической уверенности / [А.К. Шидловский и др.] – К.: Институт электродинамики, 1997. – (Препринт 802 / НАН Украины.)
2. Дмитрієва О.М. Метод симетрування для виділення стаціонарних компонент режимів виробництва і витрат енергоносіїв / О.М. Дмитрієва, О.П. Лютий // Наукові праці ДонНТУ. Серія «Електротехніка і енергетика». – Вип. 79. – Донецьк: ДонНТУ, 2004.
3. Дмитрієва О.М. Корекція незакономірних відхилень від стаціонарного режиму споживання енерго-носіїв / О.М. Дмитрієва, О.П. Лютий // Технічна електродинаміка. Тем. випуск: Проблеми сучасної електротехніки. – 2006. – Ч. 2.
4. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика / В.С. Пугачев. – М.: Физматгиз, 1979.
5. Вентцель Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель – М.: Наука, 1969.
6. Дмитриева Е.Н. Принцип практической уверенности в задачах электроэнергетики / Е.Н. Дмитриева // Электричество. – 2008. – № 8.

Надійшла до редколегії 16.03.2011 *Рецензент: П.П. Говоров*

А.П. ЛЮТЫЙ [1], Э.Г. КУРЕННЫЙ [2]
[1] ОАО «Днепроспецсталь»
[2] Государственное высшее учебное заведение «Донецкий национальный технический университет»

Математическая модель случайных величин объема выпуска продукции и расхода электроэнергии. Рассматривается система величин выпуска продукции и расхода энергоносителей в их взаимосвязи. Предлагается способ исключения анормальных опытных значений при определении параметров многомерного нормального распределения.

Выпуск продукции, электропотребление, корреляция, стационарный режим.

A. LYUTY [1], E. KOURENNYI [2]
[1] Ltd «Dneprocpetsstal»
[2] State Institution of Higher Education «Donetsk National Technical University»

A Mathematical Model of Varieties of Make Quantity and Power Consumption. The system of values of product output and the energy carriers discharge in their correlation is considered. The method of an exception of abnormal experimental values is offered at determination of parameters of multivariate normal distribution.

Production output, electricity consumption, correlation, steady-state condition.