Ляхов А.В. , Шмидт Д.С.

Использование метода динамического программирования при решениидискретных технико-экономических задач.

Сцельюминимизациизатрат, связанных с процессами, реализуемыми во времени и в пространстве возможно использовать метод динамического программирования. Этот метод позволяет оптимизировать распределение ограниченного ресурса по этапам, если весь процесс можно четко разделить на последовательно расположенные места потребления этого ресурса.

В общем виде нужно найти такое управление U, при котором затраты З ображаються в минимум

$$З = \min\{З(U)\}. \qquad (1)$$

Задача решается в два захода - прямом и обратном. При первом заходе оптимизация производится методом последовательного приближения от первого шага (этапа) процесса к последнему, а затем, наоборот, от последнего к первому. При первом заходе, идя от предыдущих шагов к последующим, находят условно оптимальное управление. При втором заходе оптимизация начинается от последнего шага, для которого оптимальное управление известно, последовательно переходя от условных к оптимальным управлениям.

При решении поставленной задачи оптимального распределения ресурсов по шагам (этапам), если нет соответствующих зависимостей, детерминированно на каждом этапе производятся расчеты – для каждого варианта необходимо знать затраты (в денежном выражении), вызванные потреблением ресурса. После каждого этапа ресурс перераспределяется в зависимости от финансовых затрат и заранее назначенных технических или иных вариантов использования ресурса. Задача решается в условиях

:распределяемые ресурсы ограничены, финансовые затраты условно неограниченны.

Схематически рассматриваемый процесс можно упрощенно представить следующим образом

1-й этап 2-й этап 3-й этапn-й этап

Рис.1. Общая схема процесса.

Рассмотрим прямой ход.

1-й этап. Из возможных вариантов потребления ресурса выбираются те, которые удовлетворяют всем технологическим требованиям (условиям, ограничениям). Как правило, увеличение количества вариантов только усложняет процесс решения задачи. Но если мы не укладываемся в заранее разработанные рядывариантов потребления распределяемого ресурса по этапам, некоторые ряды на отдельных этапах могут быть расширены при условии соблюдения заранее оговоренных требований.

Итак, на первом этапе запишем ограниченный ряд технических или организационных параметров (значений) и для них рассчитаем затраты и потребляемые ресурсы

;

;

$$P: P, P, P, \ldots, P^{1}$$

.

где В – варианты параметров – порядковые номера ;

З–затраты, связанные с реализацией технического (организационного) мероприятия соответствующего параметра, грн.

Р– ресурс, необходимый для реализации мероприятия,соответствующего параметра,ед. измерения.

2-ой этап. Он технологически (организационно) отличается от первого. Составляются и рассчитываются следующие исходные данные

;

$$З_1^{2}, З_2^{2}, З_3^{2}, \ldots, З_n^{2};$$

$$P_1^2, P_2^2, P_3^2, \ldots, P_n^2;$$

$$З_1^{1,2}, З_2^{1,2}, З_3^{1,2}, \ldots, З_n^{1,2};$$

$$P_1^{1,2}, P_2^{1,2}, P_3^{1,2}, \ldots, P_n^{1,2};$$

где $З^{1,2}$ – суммарные затраты на 1-ом и 2-ом этапе, грн ;

– суммарные потребленные ресурсы на 1-ом и 2-ом этапах, ед. измерения.

Суммарным затратам $З^{1,2}$, соответствующим ресурсам $P^{1,2}$ для двух этапов, найдем условные оптимальные значения, используя данные (табл. 1 и 2).

Таблица 1 – Суммарные затраты на первых двух этапах

$P^{1,2}$	$З_1^{1,2}$	$З_2^{1,2}$	$З_3^{1,2}$	…	$З_n^{1,2}$

$P_1^{1,2}$					
$P_2^{1,2}$	Зона расположения минимальных суммарных затрат на этапах двух				
$P_3^{1,2}$					
.					
$P_n^{1,2}$					
$P^{1,2}$	P_1^2	P_2^2	P_3^2	…	P_n^2

На втором этапе, как это было и на первом, назначаются несколько значений технического (организационного) параметра, для них рассчитываются затраты и ресурсы.

В табл. 1 в нижней строке записаны значения ресурса (P_i^2) на втором этапе при различных параметрах. В левом крайнем столбце ($P^{1,2}$) представлены сверху - вниз, по уменьшению, суммарные ресурсы для двух этапов процесса. В клетках таблицы на пересечении столбцов и строк располагаем затраты для двух этапов. Первое слагаемое из них – это затраты для второго этапа, оно соответствует значениям ресурса нижней строки. Второе слагаемое – затраты, связанные с использованием ресурса на первом этапе. Определяются они следующим образом. Из суммарного значения ресурса $P_1^{1,2}$,записанного внизу в левом нижнем столбце, вычтем ресурс нижней строки P_1^2 нижней строки, получим разность ($P_n^{1,2}$ - P_1^2), с которой войдем в ряд значений ресурса на первом этапе и соответственно введем к тому ресурсу получим затраты, например, З_n^1.Сложим затраты З_n^2 + З_n^1 = $\text{З}_n^{1,2}$ и запишем в табл.1

напересечении строки $P_n^{1,2}$и столбца $З_{1.2}^{1}$. Таким образом, заполним всю табл.1. Опыт показал, что минимальные суммарные затраты расположены по диагонали этой таблицы.

Таблица 2 – Условно оптимальные затраты на двух этапах

P^2	P_1^2	P_2^2	P_3^2	…	P_n^2
$З^{1,2}$				…	
$P^{1.2}$	$P_1^{1.2}$	$P_2^{1.2}$	$P_3^{1.2}$	…	$P_n^{1.2}$

Табл. 2 заполняется так. В нижней строке записываются суммарные ресурсы для двух этапов в возрастающем порядке ; в средней – условно оптимальные затраты тоже для двух этапов. Для этого из табл.1 по столбцам последовательно, слева – направо, выбираются суммарные затраты на двух этапах и минимальные заносятся в табл.2.

Следует отметить, что при формировании табл.1 не всегда удается попасть в узлы сетки предыдущих этапов, полученной в результате условной оптимизации. Для получения промежуточных значений следует воспользоваться интерполяционной формулой

$$\frac{P_i - P^1}{P_i - P_{i+1}}(З_i - З_{i+1}) + З_{i+1} \qquad ,$$

где P_{i+1}, $З_{i+1}$ - суммарные ресурсы и суммарные затраты для всех этапов (без последнего)в*i-м* узле сетки;

Pi, Зi - суммарные ресурсы и суммарные затраты для всех этапов (без последнего) в *i-м* узле сетки;

н

- суммарные ресурсы для всех этапов в промежуточной точке между *i+1* и *i*-м узлами сетки.

3-ий этап. Расчеты выполняются аналогично описанным на втором этапе.

Подбираем и рассчитываем исходные данные

;

;

$$\mathbf{P}_1^3, \mathbf{P}\,\square_2^3, \mathbf{P}_3^3, \ldots, \mathrm{P}_n^3 \;;$$

$$З_1^{1,2,3,З}{}_2^{1,2,3,З}{}_n^{1,2,3}, \ldots, З_n^1, 2, 3 \;;$$

$$\mathbf{P}_1^1, 2, 3, \mathbf{P}\,\square_2^1, 2, 3, \mathbf{P}_3^1, 2, 3, \ldots, \mathrm{P}_n^1, 2, 3 \;.$$

Заполняются табл. 3 и 4.

Таблица 3 –Суммарные затраты на трех этапах

	$\text{З}_1^{1,2,3}$	$\text{З}_2^{1,2,3}$	$\text{З}_3^{1,2,3}$	…	$\text{З}_n^{1,2,3}$
	Зона расположения минимальных суммарных затрат на трех этапах				
.					
$P_n^{1,2,3}$					
P^3	P_1^3	P_2^3	P_3^3	…	P_n^3

Таблица 4 – Условно оптимальные затраты на трёх этапах

P^3	P_1^3	P_2^3	P_3^3	…	P_n^3
$\text{З}^{1,2,3}$	$\text{З}_1^{1,2,3}$	$\text{З}_2^{1,2,3}$	$\text{З}_3^{1,2,3}$	…	$\text{З}_n^{1,2,3}$
				….	

Надо иметь в виду, что в табл.4 суммарные затраты ($\text{З}^{1,2,3}$)должны быть условно минимальные для трех этапов.

Дальнейшие расчеты для оставшихся этапов производятся аналогично, кроме последнего.

Расчеты на последнем этапе в отличие от предыдущих имеют ту особенность, что здесь нужно получить оптимальные суммарные затраты при ограниченных в целом ресурсах для всех этапов.

В начале запишем исходные данные, соответствующие последнему этапу (m).

1^m , 2^m , 3^m ,....,n^m;

$З^m$, $З^m$, $З^m$,…, $З_n^m$;

P_1^m , P_2^m, P_3^m ,…,.P_n^m.

Затем из фиксированной величины ресурсов (P) вычтем ресурсы первого параметра на последнем этапе (P_1^m) и с этой разностью войдем в итоговую таблицу предпоследнего этапа (m-1) и в соответствии с величиной (P – P_1^m) найдем суммарные затраты для всех этапов без последнего ; к этим затратам прибавим затраты на последнем этапе

$З^m$

( ) , получим оптимальные затраты реализации процесса целиком.

В конкретных задачах, кроме оптимальных затрат, необходимо знать параметры на этапах при которых эти затраты получены, т.е. необходимо решить обратную задачу. Для этого, чтобы определить параметр на предыдущем этапе, нужно из фиксированной величины общих ресурсов вычесть ресурсы последнего этапа (P - P_1^m) и с этой разностью войдем в сетку суммарных ресурсов на предпоследнем этапе и находим соответствующий параметр процесса на предпоследнем этапе. Далее, из (P - P_1^m) вычитаем ресурс (P^{m-1}) , соответствующий найденному параметру на предпоследнем этапе и с этим ресурсом(P- P_1^m - P^{m-1})

войдем в следующую сетку суммарных ресурсов на третьем этапе, начиная с конца процесса ,и в соответствии с величиной этого ресурса находим параметр на указанном этапе. Такая процедура поиска параметров на оставшихся этапах выполняется аналогично. На последнем этапе при обратном ходе с оставшимися ресурсами входим в сетку первого этапа и найдем соответствующий параметр. В результате получим искомые параметры при минимальных затратах.

Необходимо проверить решение задачи, для этого затраты, соответствующие найденным параметрам сложить и должны получить оптимальные суммарные затраты для всего процесса с допустимым отклонением от оптимальных.

Описанный алгоритм поиска оптимального решения не трудно переложить на компьютерную программу.

Литература

1. Беллман Я., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. «Наука», 1965 г.
2. Вентцель Е.С. Элементы динамического программирования. «Наука», 1964 г.
3. Иванов Н.И., Ляхов А.В. Использование метода динамического программирования при решении вопросов вскрытия и подготовки шахтных полей. К.; Журнал «Уголь Украины», 1968 г.