

УДК 531.383

©2002. А.В. Гладун

СТАБИЛИЗАЦИЯ ОРИЕНТАЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОМОЩЬЮ ГИРОДИНОВ

Исследуется задача стабилизации ориентации твердого тела, несущего два или три гироскопа. Предложен алгоритм построения управлений, осуществляющих стабилизацию ориентации твердого тела по линейному приближению. Стабилизация достигается путем выбора собственных чисел, соответствующих матрице преобразованной системы и от которых, как от переменных, зависит управление. Как мнимые, так и действительные части собственных чисел этой матрицы подбираются таким образом, чтобы минимизировать норму управления. Приведены результаты численного моделирования.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу активной стабилизации твердого тела, осуществляемой при помощи гироскопов. Гироскоп - двухстепенная гироскопическая система, состоящая из ротора и гирокамеры. Ротор закреплен внутри гирокамеры и вращается с постоянной угловой скоростью. Преобразуем уравнения движения твердого тела с s гироскопами, полученные в работе [1], введя переменные [2]

$$\xi_j = J_j(\mathbf{l}_{0j}^*, \boldsymbol{\omega}) + J_j \dot{q}_j, \quad j = 1, \dots, s$$

и предполагая, что ротор является шаровым, а гирокамера динамически симметрична относительно своей оси вращения. Далее запишем уравнения в системе координат $Oxyz$, жестко связанной с носителем, выбрав ее таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\omega} - \sum_{j=1}^s J_j(\mathbf{l}_{0j}^*, \boldsymbol{\omega}) \mathbf{l}_{0j} = (A_1 \omega_1, A_2 \omega_2, A_3 \omega_3)^*$$

где A_1, A_2, A_3 – обобщенные моменты инерции.

Система уравнений, описывающая движение твердого тела несущего s гироскопов, принимает вид

$$A_1 \dot{\omega}_1 = (A_2 - A_3) \omega_2 \omega_3 + \sum_{j=1}^s \left(\frac{1}{J_j} h_j \xi_j [\sin q_j n_{0j}^1 - \cos q_j k_{0j}^1] - \omega_2 \xi_j l_{0j}^3 + \omega_3 \xi_j l_{0j}^2 - l_{0j}^1 u_j \right) \quad (123)$$

$$\dot{q}_j = \frac{1}{J_j} \xi_j - (\mathbf{l}_{0j}^*, \boldsymbol{\omega}) \quad j = 1, \dots, s \quad (1)$$

$$\dot{\xi}_j = h_j [(\mathbf{k}_{0j}^*, \boldsymbol{\omega}) \cos q_j - (\mathbf{n}_{0j}^*, \boldsymbol{\omega}) \sin q_j] + u_j$$

Здесь $\boldsymbol{\theta}$ – матрица тензора инерции системы носитель-гироскопы; $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^*$ – вектор угловой скорости носителя; $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_s)$ – вектор углов поворота гирокамер относительно носителя; $\mathbf{k}_{0j}^* = (k_{0j}^1, k_{0j}^2, k_{0j}^3)$; $\mathbf{l}_{0j}^* = (l_{0j}^1, l_{0j}^2, l_{0j}^3)$; $\mathbf{n}_{0j}^* = (n_{0j}^1, n_{0j}^2, n_{0j}^3)$; $\mathbf{k}_{0j}, \mathbf{l}_{0j}, \mathbf{n}_{0j}$ – орты, задающие положение i -го гироскопа в теле носителя; $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_s)^*$ – вектор управлений; $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_s)^*$; $\mathbf{J} = (J_1, \dots, J_s)^*$ – постоянные, задающие кинетические моменты гироскопов; * – символ транспонирования.

Запишем уравнения (1) для двух случаев.

Случай 1. Пусть на носителе (твердое тело) установлено два гироскопа и ось вращения

одного из них не совпадает ни с одной из координатных осей. В качестве ортов примем следующие:

$$\mathbf{k}_{01} = (6/35, 6/7, -17/35)^*; \mathbf{l}_{01} = (2/7, 3/7, 6/7)^*; \mathbf{n}_{01} = (33/35, -2/7, -6/35)^*$$

$$\mathbf{k}_{02} = (0, 0, 1)^*; \mathbf{l}_{02} = (1, 0, 0)^*; \mathbf{n}_{02} = (0, 1, 0)^*$$

Тогда получаем уравнения движения в форме

$$\begin{aligned} A_1 \dot{\omega}_1 &= (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + \frac{3}{7}\omega_3\xi_1 - \frac{6}{7}\omega_2\xi_1 + \frac{h_1}{35J_1}\xi_1(33\sin q_1 - 6\cos q_1) - \frac{2}{7}u_1 - u_2 \\ A_2 \dot{\omega}_2 &= (A_3 - A_1)\omega_1\omega_3 + \frac{6}{7}\omega_1\xi_1 - \frac{2}{7}\omega_3\xi_1 - \omega_3\xi_2 - \frac{2h_1}{7J_1}\xi_1(\sin q_1 + 3\cos q_1) + \frac{h_2}{J_2}\xi_2\sin q_2 - \frac{3}{7}u_1 \\ A_3 \dot{\omega}_3 &= (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + \frac{2}{7}\omega_2\xi_1 - \frac{3}{7}\omega_1\xi_1 + \omega_2\xi_2 - \frac{1}{35J_1}h_1\xi_1(6\sin q_1 - 17\cos q_1) - \frac{h_2}{J_2}\xi_2\cos q_2 - \frac{6}{7}u_1 \\ \dot{q}_1 &= \xi_1/J_1 - (2\omega_1 + 3\omega_2 + 6\omega_3)/7 \\ \dot{q}_2 &= \xi_2/J_2 - \omega_1 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= h_1[(6\cos q_1 - 33\sin q_1)\omega_1 + 10(3\cos q_1 + \sin q_1)\omega_2 + (6\sin q_1 - 17\cos q_1)\omega_3]/35 + u_1 \\ \dot{\xi}_2 &= h_2(\omega_3\cos q_2 - \omega_2\sin q_2) + u_2 \end{aligned}$$

Случай 2. Уравнения движения динамической системы (1), состоящей из носителя и трех гиродинов, оси вращения гирокамер которых направлены соответственно по осям системы координат $Oxyz$ имеют вид

$$\begin{aligned} A_1 \dot{\omega}_1 &= (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 - \frac{h_2}{J_2}\xi_2\cos q_2 + \frac{h_3}{J_3}\xi_3\sin q_3 + \omega_3\xi_2 - \omega_2\xi_3 - u_1 \\ \dot{q}_1 &= \frac{1}{J_1}\xi_1 - \omega_1 \\ \dot{\xi}_1 &= h_1(\omega_3\cos q_1 - \omega_2\sin q_1) + u_1 \end{aligned} \quad (123) \quad (3)$$

Для изучения задачи стабилизации ориентации твердого тела с помощью гиродинов к замкнутым динамическим уравнениям (2),(3), описывающим вращательное движение твердого тела(носителя), добавим кинематические уравнения Родрига-Гамильтона, которые определяют ориентацию носителя в пространстве.

$$\begin{aligned} 2\dot{\eta}_0 &= -(\omega_1\eta_1 + \omega_2\eta_2 + \omega_3\eta_3) \\ 2\dot{\eta}_1 &= \omega_1\eta_0 + \omega_3\eta_2 - \omega_2\eta_3 \\ 2\dot{\eta}_2 &= \omega_2\eta_0 + \omega_1\eta_3 - \omega_3\eta_1 \\ 2\dot{\eta}_3 &= \omega_3\eta_0 + \omega_2\eta_1 - \omega_1\eta_2 \end{aligned} \quad (4)$$

Система (4) имеет интеграл

$$\eta_0^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = 1 \quad (5)$$

Задача. Под задачей стабилизации ориентации будем понимать стабилизацию частного движения твердого тела, при которой он находится в положении равновесия

$$\boldsymbol{\omega} = 0, \boldsymbol{\xi} = 0, \mathbf{q} = \mathbf{q}^{(0)}, \mathbf{q}^{(0)} \equiv const$$

и параметры Родрига-Гамильтона принимают заданные значения

$$\eta_0 = \eta_0^{(0)}, \eta_1 = \eta_1^{(0)}, \eta_2 = \eta_2^{(0)}, \eta_3 = \eta_3^{(0)}, \eta_0^{(0)}, \eta_1^{(0)}, \eta_2^{(0)}, \eta_3^{(0)} \equiv const$$

где $\eta_0^{(0)}, \eta_1^{(0)}, \eta_2^{(0)}, \eta_3^{(0)}$ удовлетворяют равенству (5).

2. Разрешимость задачи стабилизации. Будем решать задачу стабилизации ориентации по линейному приближению. Поскольку по линейному приближению не удастся решить задачу управления угловой скоростью (по переменным $\omega_1, \omega_2, \omega_3$) твердого тела с помощью одного гироскопа [3], то тем более динамическая система, описывающая движение твердого тела, несущего один гироскоп не будет являться стабилизируемой по линейному приближению. Это утверждение справедливо при любом расположении оси вращения гироскопа гироскопа по отношению к осям системы координат $Oxyz$.

Добавим к динамическим уравнениям (2) кинематические уравнения (4) и рассмотрим задачу стабилизации с помощью двух гироскопов. Составим уравнения возмущенного движения системы (2),(4), перейдя к новым переменным

$$\begin{aligned} x_1 = \omega_1, x_2 = \omega_2, x_3 = \omega_3, x_4 = \xi_1, x_5 = \xi_2, x_6 = \eta_0 - \eta_0^{(0)}, x_7 = \eta_1 - \eta_1^{(0)} \\ x_8 = \eta_2 - \eta_2^{(0)}, x_9 = \eta_3 - \eta_3^{(0)}, x_{10} = q_1 - q_1^{(0)}, x_{11} = q_2 - q_2^{(0)} \end{aligned}$$

и линеаризуем полученную систему в положении равновесия $\mathbf{x} = 0$. Первые восемь уравнений системы линейного приближения не зависят от оставшихся трех переменных x_9, x_{10}, x_{11} и имеют вид

$$\begin{aligned} A_1 \dot{x}_1 &= \frac{h_1}{35J_1} x_4 (33 \sin q_1^{(0)} - 6 \cos q_1^{(0)}) - \frac{2}{7} u_1 - u_2 \\ A_2 \dot{x}_2 &= -\frac{2h_1}{7J_1} x_4 (\sin q_1^{(0)} + 3 \cos q_1^{(0)}) + \frac{h_2}{J_2} x_5 \sin q_2^{(0)} - \frac{3}{7} u_1 \\ A_3 \dot{x}_3 &= -\frac{h_1}{35J_1} x_4 (6 \sin q_1^{(0)} - 17 \cos q_1^{(0)}) - \frac{h_2}{J_2} x_5 \cos q_2^{(0)} - \frac{6}{7} u_1 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\dot{x}_4 = h_1 [(6 \cos q_1^{(0)} - 33 \sin q_1^{(0)}) x_1 + 10(3 \cos q_1^{(0)} + \sin q_1^{(0)}) x_2 + (6 \sin q_1^{(0)} - 17 \cos q_1^{(0)}) x_3] / 35 + u_1$$

$$\dot{x}_5 = h_2 (x_3 \cos q_2^{(0)} - x_2 \sin q_2^{(0)}) + u_2 \quad 2\dot{x}_6 = -(x_1 \eta_1^{(0)} + x_2 \eta_2^{(0)} + x_3 \eta_3^{(0)})$$

$$2\dot{x}_7 = x_1 \eta_0^{(0)} + x_3 \eta_2^{(0)} - x_2 \eta_3^{(0)} \quad 2\dot{x}_8 = x_2 \eta_0^{(0)} + x_1 \eta_3^{(0)} - x_3 \eta_1^{(0)}$$

Переменная x_9 связана с переменными x_6, x_7, x_8 интегралом (5) и выражается через них, поэтому стабилизация невозмущенного движения системы (6) влечет за собой стабилизацию ориентации носителя в заданном направлении. Переменные x_{10}, x_{11} определяют не интересующие нас углы поворота гироскопов соответственно первого и второго гироскопов, поэтому могут быть отброшены. Исследуем систему (6) на управляемость по всем переменным.

Пусть $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ есть система (6), записанная в матричном виде. Рассмотрим матрицу $\mathbf{M} = \{\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \mathbf{A}^3\mathbf{B}\}$. Поскольку определитель матрицы \mathbf{M} равен нулю ($\det(\mathbf{M}) = 0$), то система (6) не управляема по всем переменным. Следовательно, задача стабилизации ориентации носителя не может быть решена по линейному приближению с помощью двух гироскопов.

Рассмотрим задачу стабилизации с помощью трех гиродинов. Составим уравнения возмущенного движения системы, перейдя к новым переменным

$$\begin{aligned} x_1 = \omega_1, x_2 = \omega_2, x_3 = \omega_3, x_4 = \xi_1, x_5 = \xi_2, x_6 = \xi_3, x_7 = \eta_0 - \eta_0^{(0)}, x_8 = \eta_1 - \eta_1^{(0)} \\ x_9 = \eta_2 - \eta_2^{(0)}, x_{10} = \eta_3 - \eta_3^{(0)}, x_{11} = q_1 - q_1^{(0)}, x_{12} = q_2 - q_2^{(0)}, x_{13} = q_3 - q_3^{(0)} \end{aligned}$$

и линеаризуем полученную систему в положении равновесия $\mathbf{x} = 0$. Первые девять уравнений системы линейного приближения не зависят от оставшихся четырех переменных $x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}$ и имеют вид

$$\begin{aligned} A_1 \dot{x}_1 &= \frac{h_3}{J_3} x_6 \sin q_3^{(0)} - \frac{h_2}{J_2} x_5 \cos q_2^{(0)} - u_1 & \dot{x}_4 &= h_1 (x_3 \cos q_1^{(0)} - x_2 \sin q_1^{(0)}) + u_1 \\ A_2 \dot{x}_2 &= \frac{h_1}{J_1} x_4 \sin q_1^{(0)} - \frac{h_3}{J_3} x_6 \cos q_3^{(0)} - u_2 & \dot{x}_5 &= h_2 (x_1 \cos q_2^{(0)} - x_3 \sin q_2^{(0)}) + u_2 \\ A_3 \dot{x}_3 &= \frac{h_2}{J_2} x_5 \sin q_2^{(0)} - \frac{h_1}{J_1} x_4 \cos q_1^{(0)} - u_3 & \dot{x}_6 &= h_3 (x_2 \cos q_3^{(0)} - x_1 \sin q_3^{(0)}) + u_3 \\ 2\dot{x}_7 &= -(x_1 \eta_1^{(0)} + x_2 \eta_2^{(0)} + x_3 \eta_3^{(0)}) & 2\dot{x}_8 &= x_1 \eta_0^{(0)} + x_3 \eta_2^{(0)} - x_2 \eta_3^{(0)} \\ & & 2\dot{x}_9 &= x_2 \eta_0^{(0)} + x_1 \eta_3^{(0)} - x_3 \eta_1^{(0)} \end{aligned} \quad (7)$$

Переменная x_{10} связана с переменными x_7, x_8, x_9 интегралом (5) и выражается через них, поэтому стабилизация невозмущенного движения системы (7) влечет за собой стабилизацию ориентации носителя в заданном направлении. Переменные x_{11}, x_{12}, x_{13} , определяют не интересующие нас углы поворота гирокамер соответственно первого, второго и третьего гиродинов, поэтому могут быть отброшены. Исследуем систему (7) на управляемость по всем переменным. Предположим, что все три гироскопа имеют одинаковые кинетические моменты. Выберем следующие значения параметров

$$\begin{aligned} A_1 = 230, A_2 = 310, A_3 = 210, q_1^{(0)} = \pi/3, q_2^{(0)} = \pi/6, \\ q_3^{(0)} = \pi/2, \eta_0^{(0)} = 2/7, \eta_1^{(0)} = 4/7, \eta_2^{(0)} = 5/7, \eta_3^{(0)} = 2/7, \\ J_1 = J_2 = J_3 = 3, w = 200, h_1 = J_1 w, h_2 = J_2 w, h_3 = J_3 w. \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ есть система (7), записанная в матричном виде. Рассмотрим матрицу

$$\mathbf{T} = \{\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \mathbf{A}^3\mathbf{B}, \mathbf{A}^4\mathbf{B}, \mathbf{A}^5\mathbf{B}, \mathbf{A}^6\mathbf{B}, \mathbf{A}^7\mathbf{B}, \mathbf{A}^8\mathbf{B}\},$$

где $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}, \mathbf{b}^{(3)}\}$, $\mathbf{b}^{(1)} = (-1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)^*$, $\mathbf{b}^{(2)} = (0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)^*$, $\mathbf{b}^{(3)} = (0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, 0)^*$. При заданных значениях определитель матрицы $\det(\mathbf{T}) = 0.221663 \cdot 10^{12}$, следовательно $\text{rang}(\mathbf{T}) = 9$, а значит система (7) управляема по всем переменным. Из свойства управляемости линейной системы (7) следует ее стабилизируемость, а поскольку остальные переменные системы (3) не входят в систему (7), то и стабилизируемость (3) по части переменных по линейному приближению [4, с.664].

3. Построение стабилизирующего управления. Построим управления u_1, u_2, u_3 , решающие задачу стабилизации для системы (7). Сделаем замену переменных $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$. Поскольку матрица \mathbf{T} не вырожденная, то система (7) примет вид

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{P}\mathbf{y} + \mathbf{d}_1 u_1 + \mathbf{d}_2 u_2 + \mathbf{d}_3 u_3, \quad (9)$$

где $\mathbf{P} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$, $\mathbf{d}_1 = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b}^{(1)}$, $\mathbf{d}_2 = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b}^{(2)}$, $\mathbf{d}_3 = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b}^{(3)}$. Путем выбора в качестве матрицы \mathbf{T} матрицы управляемости системы получаем матрицу \mathbf{P} в виде:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -21638950 & 3.07566 & 3.23587 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0009975 & -0.174534 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -511520.74 & 0.0079875 & 0.014016 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.0000328 & -0.0000276 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1489.08 & 0.000002 & 0.000013 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0.00000008 & 0.00000004 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и следующие вектора \mathbf{d}_1 , \mathbf{d}_2 , \mathbf{d}_3 :

$$\mathbf{d}_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^*, \mathbf{d}_2 = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^*, \mathbf{d}_3 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^*.$$

Последнее уравнение содержит только управление u_3 , предпоследнее уравнение управление u_2 , тогда выбирая их соответствующим образом, можем обеспечить стабилизацию переменных y_8, y_9 фазового вектора системы (9). Для остальных уравнений это означает, что в каждом из них переменные y_8, y_9 монотонно убывают, следовательно, для стабилизации оставшихся переменных фазового вектора достаточно решить задачу стабилизации для системы

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \\ \dot{y}_5 \\ \dot{y}_6 \\ \dot{y}_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -21638950 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -511520.74 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1489.08 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_1 \quad (10)$$

В итоге исходная система (7) распадается после замены переменных на три системы, причем в первой системе содержится управление u_1 , во второй управление u_2 , а в третьей u_3 .

Возьмем в качестве второго управления $u_2 = -y_8$, тогда $y_8 = y_8^{(0)}e^{-t}$, где $y_8^{(0)} = y_8(t_0)$ и характеристическое значение $\lambda_8 = -1$, в качестве третьего управления $u_3 = -y_9$, тогда $y_9 = y_9^{(0)}e^{-t}$, где $y_9^{(0)} = y_9(t_0)$ и характеристическое значение $\lambda_9 = -1$. Так как $\mathbf{y} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$ то вычисляя из обратной замены переменные y_8, y_9 , получаем

$$u_2 = [491.31864(\eta_0 - \eta_0^{(0)}) + 1695.82369(\eta_1 - \eta_1^{(0)}) + 2924.12029(\eta_2 - \eta_2^{(0)}) - \xi_2]/2,$$

$$u_3 = [171.42857(\eta_0 - \eta_0^{(0)}) + 2057.1429(\eta_1 - \eta_1^{(0)}) + 2485.7143(\eta_2 - \eta_2^{(0)}) + \xi_3]/(-2).$$

Стабилизирующее управление для системы (10) будем строить по формуле $u_1 = \mathbf{c}^*\mathbf{y}$ [5],

$$\mathbf{c} = \mathbf{T}^{(-1)*} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_6 & p_5 & \dots & 1 \end{pmatrix}^{-1} (\mathbf{p} - \mathbf{v}),$$

где \mathbf{p} – последний столбец матрицы в системе (10), а \mathbf{v} – вектор коэффициентов соответствующего системе характеристического уравнения

$$\lambda^7 + v_1\lambda^6 + v_2\lambda^5 + v_3\lambda^4 + v_4\lambda^3 + v_5\lambda^2 + v_6\lambda + v_7 = 0.$$

Обозначим корни характеристического уравнения через $\lambda_{1,2} = \alpha_1 \pm \beta_1 i$, $\lambda_{3,4} = \alpha_2 \pm \beta_2 i$, $\lambda_{5,6} = \alpha_3 \pm \beta_3 i$, $\lambda_7 = \alpha_4$.

4. Оптимизация управления в задачах стабилизации. Находим компоненты вектора \mathbf{c} коэффициентов управления, вычисляя их явно с помощью математического пакета и записываем функцию

$$g(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^7 c_i^2.$$

Будем искать минимум функции $g(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ в области $\alpha_1 \leq -1$, $\alpha_2 \leq -1$, $\alpha_3 \leq -1$, $\alpha_4 \leq -1$, $-500 \leq \beta_1 \leq 500$, $-500 \leq \beta_2 \leq 500$, $-500 \leq \beta_3 \leq 500$ методом сопряженных градиентов, начиная спуск с точки $\alpha_1 = -10$, $\alpha_2 = -20$, $\alpha_3 = -10$, $\alpha_4 = -20$, $\beta_1 = 10$, $\beta_2 = -10$, $\beta_3 = 10$. Получим

$$\min(g(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})) = 1017218.85$$

при $\alpha_1 = -4.71151$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = -12.49315$, $\alpha_4 = -1$, $\beta_1 = -3.43832$, $\beta_2 = -32.66181$, $\beta_3 = -0.53 \cdot 10^{-5}$. Подставляя $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ в формулу управления, имеем

$$u_1 = -656.8684\omega_1 + 315.44732\omega_2 + 611.9179\omega_3 - 40.26527\xi_1 + 1.01757\xi_2 + 2.9139\xi_3 + 288.4156(\eta_0 - \eta_0^{(0)}) + 121.6622(\eta_1 - \eta_1^{(0)}) - 110.3455(\eta_2 - \eta_2^{(0)}).$$

Результаты численного моделирования применения построенных управлений u_1, u_2, u_3 для стабилизации системы (3),(4) с начальным условием

$$\mathbf{x}^{(0)} = (1/15, -1/18, 1/16, 1/14, -1/15, 1/14, 3/10, 3/5, 7/10, \sqrt{3}/5\sqrt{2}, \pi/3, \pi/6, \pi/2)$$

приведены на рисунках *Рис.1 – Рис.3*.

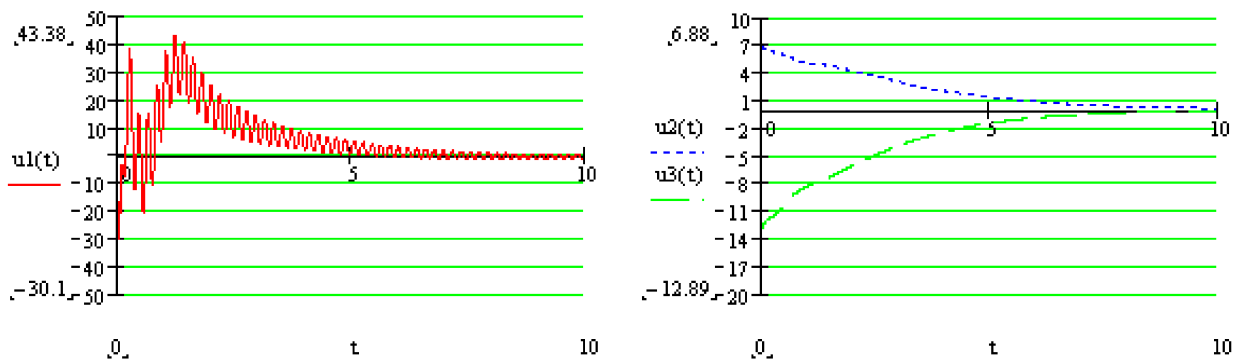


Рис. 1.

В момент времени $t = 5$ фазовый вектор системы принимает следующее значение

$$\mathbf{x}^{(1)} = (0.0045, 0.0063, -0.0024, -0.1, -0.01, 0.0009, 0.285, 0.57, 0.715, 0.283, 1.16, 0.35, 1.59)$$

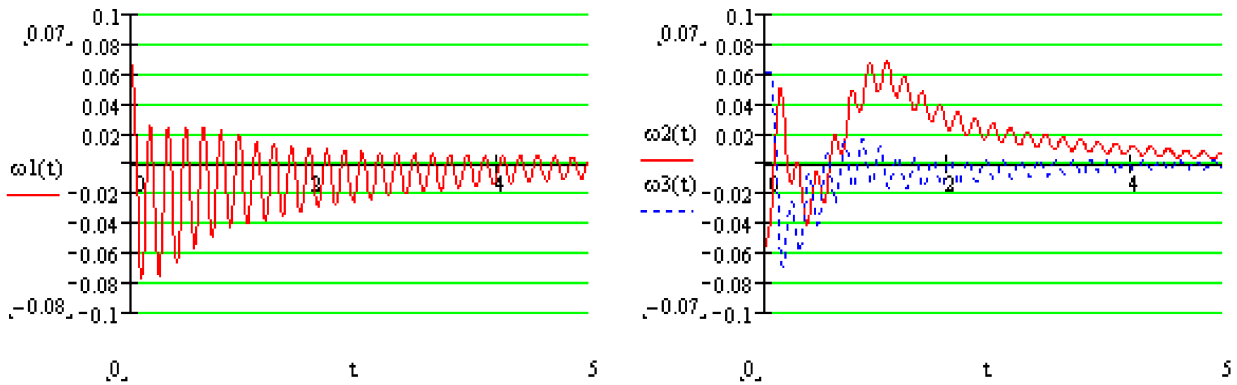


Рис. 2.

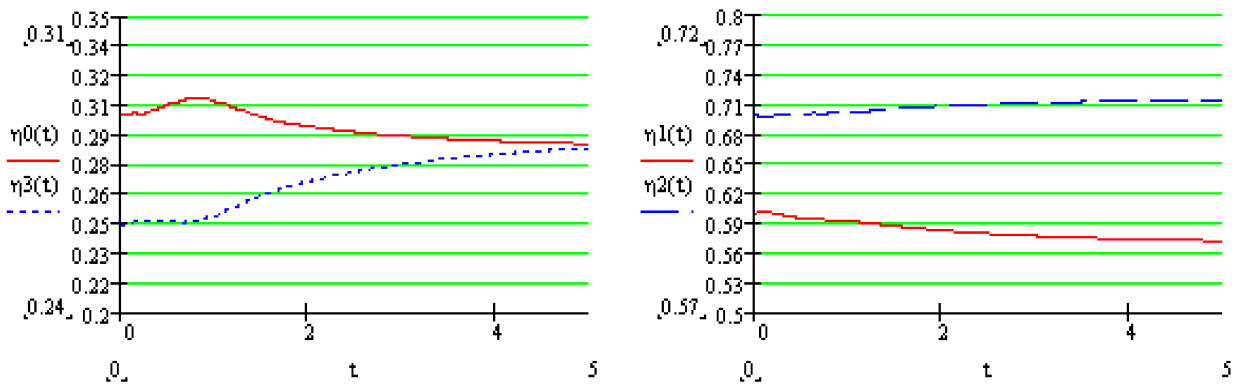


Рис. 3.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если, действуя таким же образом, как выше и при значениях (8), построить стабилизирующее управление для динамической системы, представляющей собой носитель, несущий разные гироскопы, то обнаруживаем, что использование гироскопов с разными кинетическими моментами приводит к более гладким законам управления и траектории движения системы. В случае уменьшения суммарного кинетического момента гироскопической системы время стабилизации носителя увеличивается.

1. Смирнов Е.Я., Павлинов В.Ю., Щербаков П.П., Юрков А.В. Управление движением механических систем. – Л.: Издательство ЛГУ, 1985. – 313 с
2. P.V. Kharlamov, A.M. Kovalev. Invariant relations method in multibody dynamics. // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, Vol. 30, No 6, pp. 3817-3828, 1997.
3. Ковалев А.М., Гладун А.В. Частичная стабилизация стационарных движений спутника с гироскопами. // Космическая наука и технология. – 2005. Том 11, №1. – С.11-17.
4. Озираниер А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных. // Прикладная математика и механика. – 1973. – Т.37. Вып.4. С.659-665.
5. Красовский Н.Н. Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 476 с.