УДК 531.38

© А.В. Гладун

Управление вращательными движениями твердого тела с помощью двух спарок гиродинов.

Изучается относительная управляемость динамической системы, описывающей движение твердого тела, несущего две спарки [3] гиродинов. Показана разрешимость задач управления угловой скоростью ориентацией в заданном направлении для носителя. Предложен алгоритм построения управлений, решающих двухточечные задачи для нелинейных систем с заданной степенью точности. На основе алгоритма найдены решения задач управления для носителя.

1. Постановка задачи. Рассмотрим механическую систему, состоящую из твердого тела (носителя) и двух спарок гиродинов [3]. Объединенные в спарку гиродины идентичны, оси вращения гирокамер параллельны, гирокамеры вращаются в противоположных направлениях. Роторы спарки вращаются с постоянными, одинаковыми по величине и противоположными по направлению скоростями. Пусть роторы спарок – шары, а гирокамеры динамически симметричны относительно осей их вращения. И пусть *Oxyz* есть главная центральная система координат для носителя. Установим спарки гиродинов в носителе так, чтобы ось вращения первой спарки была параллельна оси *Oy*, а ось вращения второй спарки – оси *Ox*, тогда движение системы описывается следующими уравнениями [3]:

$$
\begin{aligned}
&\omega_1 = [(A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + 2h_2\omega_3 \sin q_2 - 2h_1 u_1 \cos q_1] / A_1 \\
&\omega_2 = [(A_3 - A_1)\omega_1\omega_3 + 2h_1\omega_3 \sin q_1 - 2h_2 u_2 \cos q_2] / A_2 \\
&\omega_3 = [(A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + 2h_1\omega_2 \sin q_1 - 2h_2\omega_1 \sin q_2] / A_3 \\
&q_1 = u_1, \; q_2 = u_2
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

где $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ − вектор угловой скорости носителя относительно системы координат *Oxyz*; q_1, q_2 – углы поворота соответственно первой и второй спарок относительно осей их гирокамер; $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ – вектор управления; h_1, h_2, A_1, A_2, A_3 – некоторые постоянные.

Так, как у системы (1) существует интеграл [1], то заданная динамическая система не является управляемой по всем переменным. Воспользуемся работой [1] для изучения относительной управляемости системы (1) и найдем приближенные решения для задач управления угловой скоростью и ориентацией носителя в заданном направлении.

Задача 1. Задача управления угловой скоростью состоит в нахождении такого управления $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, что соответствующее ему движение динамической системы (1) удовлетворяет условиям

$$\boldsymbol{\omega}(t_0) = \boldsymbol{\omega}^{(0)}, \;\; \boldsymbol{\omega}(t_1) = \boldsymbol{\omega}^{(1)}.$$

Обозначим через $O\xi\eta\zeta$ абсолютную систему координат, которую будем считать, как и систему *Oxyz*, правой декартовой. Пусть далее заданы два орта $\mathbf{s_0}$ и $\mathbf{r_0}$, причем

Орт $\mathbf{s_0}$ – занимает неизменное положение в $O\xi\eta\zeta$;

Орт $\mathbf{r_0}$ – занимает неизменное положение в *Oxyz*.

Задача 2. Задача ориентации носителя в заданном направлении $\mathbf{s_0}$ [2] состоит в нахождении такого уравнения $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t), t \in [t_0, t_1]$ для двух спарок гиродинов, в результате которого создается такой управляющий момент **M**, приложенный к носителю, что орт $\mathbf{r_0}$ перемещается по отношению к системе координат $O\xi\eta\zeta$ в положение, совпадающее с ортом $\mathbf{s_0}$. Конкретизируя задачу, будем искать управление, осуществляющее поворот носителя из одного состояния покоя в другое, т.е.

$$\boldsymbol{\omega}(t_0) = 0,\ \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r_0},$$

$$\boldsymbol{\omega}(t_1) = 0,\ \mathbf{r}(t_1) = \mathbf{s_0}.$$

Обозначим через s_i, r_i (i = 1, 2, 3) проекции векторов $\mathbf{s_0}$, $\mathbf{r_0}$ на оси системы *Oxyz*. Тогда вектор $\mathbf{r_0} = (r_1, r_2, r_3)$ – постоянный вектор в системе *Oxyz*, а вектор $\mathbf{s_0} = (s_1, s_2, s_3)$ вращается по отношению к системе *Oxyz* с угловой скоростью ($-\boldsymbol{\omega}$). Следовательно,

$$\dot{\mathbf{s}}_\mathbf{0} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s_0},$$

откуда, в скалярной форме,

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= s_2\,\omega_3 - s_3\,\omega_2 \\ \dot{s}_2 &= s_3\,\omega_1 - s_1\,\omega_3 \\ \dot{s}_3 &= s_1\,\omega_2 - s_2\,\omega_1 \end{aligned} \tag{2}$$

Система (2) имеет интеграл

$$\sum_{i=1}^{3} s_i^2 = const = 1 \tag{3}$$

Рассматривая изменение проекций векторов $\mathbf{s_0}$ и $\mathbf{r_0}$ в системе координат *Oxyz* на промежутке времени $[t_0,\ t_1]$, видим, что для решения задачи ориентации в заданном направлении необходимо найти такое уравнение $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$, чтобы в момент времени $t = t_1$ проекции вектора $\mathbf{s_0}$ совпали с соответствующими проекциями вектора $\mathbf{r_0}$, т.е.

$$\mathbf{s_0}(t_0) = (s_1^{(0)},\ s_2^{(0)},\ s_3^{(0)}); \qquad \mathbf{s_0}(t_1) = (r_1^{(0)},\ r_2^{(0)},\ r_3^{(0)}).$$

Присоединяя к динамическим уравнениям (1) уравнения (2), получаем систему уравнений для поиска решений задачи ориентации носителя в заданном направлении.

2. Разрешимость задач управления. В работе [1] сформулирована и доказана Теорема 3 – достаточное условие относительной управляемости динамических систем по линейному приближению. Там же, для динамической системы (1) с помощью Теоремы 3 найдены условия разрешимости задачи управления угловой скоростью в некоторой окрестности положения равновесия

$$\mathbf{y}^T = (0,\ 0,\ 0,\ q_1^{(0)}, q_2^{(0)}) \tag{4}$$

где $\mathbf{y}^T = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, q_1, q_2)$, $q_1^{(0)}$, $q_2^{(0)}$ – постоянные.

Используя Теорему 3 из [1] исследуем на относительную управляемость систему (1) - (2) в окрестности следующего положения равновесия

$$\mathbf{z}^T = (0, 0, 0,\ S_1^{(0)},\ S_2^{(0)},\ S_3^{(0)}, q_1^{(0)}, q_2^{(0)}) \tag{5}$$

где $\mathbf{z}^T = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, s_1, s_2, s_3, q_1, q_2)$, $S_1^{(0)}$, $S_2^{(0)}$, $S_3^{(0)}$ и $q_1^{(0)}, q_2^{(0)}$ – постоянные.

Видим, что условия 1), 2) теоремы 3 [1] выполнены для системы (1) - (2). Действительно, правая часть в (1) - (2) дважды непрерывно дифференцируема в любом замкнутом шаре $\mathbf{H} \subset \mathbf{E_8}$ и обращается в ноль при $\mathbf{z} = 0$, $\mathbf{u} = 0$. Проверим справедливость для нее условия 3). Линеаризуя по $\mathbf{z}$, $\mathbf{u}$ систему (1) - (2) в положении равновесия (5) получим линейную систему

$$\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z} + B\mathbf{u}.$$

Если в качестве матрицы D выбрать $D = E_5$, то условие 3) для системы (1) - (2) справедливо, если выполнено равенство

$$rang\{DB,\ DAB,\ DA^2B\} = rang\ \{D\} = 5.$$

Ведем обозначения

$$a = 2h_1 \cos q_1^{(0)},\ b = 2h_2 \cos q_2^{(0)},\ c = 2h_1 \sin q_1^{(0)},\ d = 2h_2 \sin q_2^{(0)}.$$

тогда матрица $\{DB,\ DAB,\ DA^2B\}$ примет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{(-a)}{A_1} & 0 & 0 & 0 & \frac{ad^2}{A_1^2 A_3} \\ 0 & \frac{(-b)}{A_2} & 0 & 0 & \frac{acd}{A_1 A_2 A_3} \\ 0 & 0 & \frac{ad}{A_1 A_3} & \frac{(-b)c}{A_2 A_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(-b)S_3^{(0)}}{A_2} & \frac{(-a)dS_2^{(0)}}{A_1 A_3} \\ 0 & 0 & \frac{aS_3^{(0)}}{A_1} & 0 & \frac{adS_1^{(0)}}{A_1 A_3} \end{pmatrix} \tag{6}$$

Ранг матрицы (6) равен пяти, если

$$h_1 h_2 \cos q_1^{(0)} \cos q_2^{(0)} \neq 0 \text{ и } S_3^{(0)}[cS_2^{(0)} - dS_3^{(0)}] \neq 0 \tag{7}$$

Следовательно система (1) - (2) управляема по переменным $\omega_1, \omega_2, \omega_3, s_1, s_2$ в некоторой окрестности любой точки вида (5) - (7), переменная же s_3 принимает значение, определяемое интегралом (3), т.е.

$$s_3 = \pm\sqrt{1-(s_1)^2-(s_2)^2}$$

Условия (7) означают, что система (1) - (2) относительно управляема, если роторы спарок вращаются и в точке линеаризации углы поворота спарок $q_1, q_2 \neq \pi/2 + \pi n, n \in Z$, а вектор $\mathbf{s_0}$ не лежит в плоскости Oxy или в плоскости $c S_2^{(0)} - d S_1^{(0)} = 0$.

3. Алгоритм построения приближенного решения. Рассмотрим автономную динамическую систему, движение которой на отрезке времени $[t_0, t_1]$ описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \tag{8}$$

где $\mathbf{x}^T = (x_1, x_1, \ldots, x_n)$ – вектор, характеризующий состояние системы, $\mathbf{u}^T = (u_1, u_2, \ldots, u_r)$ – управление. Линеаризуя систему (8) по **x, u** в некотором положении равновесия, получим систему линейного приближения

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \tag{9}$$

для исходной динамической системы (8). Управление, построенное в [1], позволяет решать двухточечные задачи для линейной системы (9). Получаемое управление $\mathbf{u} = \mathbf{u_0}(t), t \in [t_0, t_1]$ приводит состояние системы (9) в необходимое конечное положение $\mathbf{x}^{(1)}$. Так как правая часть системы (9) приближенно описывает правую часть системы (8) в окрестности положения равновесия, то траектория движения $x_0^{н}(t)$ исходной системы (8) отличается от траектории $x_0^{л}(t)$ движения системы (9) под действием управления $\mathbf{u} = \mathbf{u_0}(t)$. Это отличие становится все более значительным, чем дальше от положения равновесия начальное $\mathbf{x}^{(0)}$ и конечное $\mathbf{x}^{(1)}$ состояния, заданные для нелинейной системы (8). В результате, построенное для линейной системы (9) управление $\mathbf{u} = \mathbf{u_0}(t)$, не приводит состояние исходной системы (8) в нужную точку. Добавим к правой части системы (9) дополнительную вектор-функцию $\mathbf{v}(t) \in C[t_0, t_1]$, которую в дальнейшем будем называть возмущением, получим

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + \mathbf{v}(t). \tag{10}$$

Каждой линейной системе (10) с определенным возмущением $\mathbf{v}(t)$ соответствует единственное управление, построенное в [1] и решающее двухточечную задачу для этой системы. Если мы найдем такое возмущение $\mathbf{v}(t)$, что под действием соответствующего ему управления $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ [1], траектории систем (8) и (10) будут совпадать, то это же управление $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ будет решением двухточечной задачи для исходной нелинейной системы (8).

Заметим, что, выбирая в качестве возмущения функцию

$$\mathbf{v}_1(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0^{н}(t), \mathbf{u}_0(t)) - A\mathbf{x}_0^{н}(t) - B\mathbf{u}_0(t),$$

получим соответствующую $\mathbf{v}_1(t)$ систему

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) + (f(\mathbf{x}_0''(t), \mathbf{u}_0(t)) - A\mathbf{x}_0''(t) - B\mathbf{u}_0(t)), \tag{11}$$

траектория движения которой под действием управления $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(t)$ совпадает с траекторией движения системы (8) под действием того же управления. В то же время управление $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(t), t \in [t_0, t_1]$ уже не приводит состояние системы (11) в точку $\mathbf{x}^{(1)}$. Найдём новое управление $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1(t), t \in [t_0, t_1]$, решая для системы (11) двухточечную задачу. Продолжая таким образом, можно ввести последовательность возмущений (k = 1, 2…)

$$\mathbf{v}_k(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}''(t), \mathbf{u}_{k-1}(t)) - A\mathbf{x}_{k-1}''(t) - B\mathbf{u}_{k-1}(t), \tag{12}$$

каждое из которых определяет соответствующую систему (10) со свойством, что под действием управления $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{k-1}(t), t \in [t_0, t_1]$ траектории систем (10) и (8) совпадают, а управление $\mathbf{u} = \mathbf{u}_k(t), t \in [t_0, t_1]$ является для системы (10) решением двухточечной задачи.

Пусть последовательность (12) сходится равномерно к функции $\mathbf{V}_p(t)$ тогда управление $\mathbf{u} = \mathbf{u}_p(t)$ есть решение двухточечной задачи для системы (10) с возмущением $\mathbf{V}_p(t)$. Более того, траектории движения систем (10) и (8) совпадают, следовательно $\mathbf{u} = \mathbf{u}_p(t)$ является решением двухточечной задачи и для исходной системы (8).

Как следует из работы [1] эти же рассуждения справедливы в случае исследования нелинейной системы (8) на относительную управляемость. В этом случае последовательности возмущений (12) соответствует последовательность управлений [1]

$$\mathbf{u}_k(t) = \omega(t_1, t)^T M^{-1} D[\mathbf{x}^{(1)} - X(t_1, t_0)\mathbf{x}^{(0)} - \int_{t_0}^{t_1} X(t_1, \tau)\mathbf{v}_k(\tau)d\tau] \tag{13}$$

которая, в случае равномерной сходимости последовательности $\mathbf{v}_k(t)$, равномерно сходится к функции $\mathbf{u} = \mathbf{u}_p(t)$. Сходимость следует из (13) и признака Вейерштрасса, поскольку ряд управлений ограничен по норме сходящимся числовым рядом.

В равенствах (13) используются следующие обозначения

$$\omega(t, \tau) = DX(t, \tau)B, \quad M = \int_{t_0}^{t_1} \omega(t_1, \tau)[\omega(t_1, \tau)]^T d\tau,$$

где $X(t, \tau)$ − фундаментальная матрица однородной системы уравнений, соответствующей системе (9).

Поиск управлений по формуле (13) занимает много времени. Вычисляя интегралы справа, преобразуем последовательность (13) к более простому виду. Интеграл

$$\int_{t_0}^{t_1} X(t_1, \tau)\, \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}'', u_{k-1})\, d\tau$$

вычислим, воспользовавшись формулой интегрирования по частям, выбирая

$$u = X(t_{1,}\tau); \qquad v = \mathbf{x}^{(0)} + \int_{t_1}^{\tau} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}^{н}(t), \mathbf{u}_{k-1}(t))dt = \mathbf{x}_{k-1}^{н}(t);$$

$$du = -X(t_1,\tau)Ad\tau; \qquad dv = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}^{н}(\tau), \mathbf{u}_{k-1}(\tau))\, d\tau$$

Интеграл

$$\int_{t_0}^{t_1} X(t_1,\tau), B\mathbf{u}_{k-1}(\tau)d\tau$$

выразим из формулы Коши для решения линейной неоднородной системы (10) с управлением $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{k-1}(t)$. В результате имеем равенства (k = 1, 2…)

$$\int_{t_0}^{t_1} X(t_1,\tau)\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}^{н}, \mathbf{u}_{k-1})d\tau = \mathbf{x}_{k-1}^{н}(t_1) - X(t_1,t_0)\mathbf{x}^{(0)} + \int_{t_0}^{t_1} X(t_1,\tau)A\mathbf{x}_{k-1}^{н}(\tau)d\tau \tag{14}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} X(t_1,\tau), B\mathbf{u}_{k-1}(\tau)d\tau = \mathbf{x}^{(1)} - X(t_1,t_0)\mathbf{x}^{(0)} + \sum_{i=0}^{k-2}(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}_i^{н}(t_1))$$

Подставляя неравенства (14) в формулу (13) получим

$$\mathbf{u}_k(t) = \omega(t_1,t)^T M^{-1} D\left[\mathbf{x}^{(1)} - X(t_1,t_0)\mathbf{x}^{(0)} + \sum_{i=0}^{k-1}(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}_i^{н}(t_1))\right], \tag{15}$$

где $\mathbf{x}_i^{н}(t_1)$ – точка, в которую попадает нелинейная система под действием управления $\mathbf{u}_i(t)$ в момент времени t_1.

Замечание 1. Возмущения (12) можно рассматривать как невязку, возникающую при приближении нелинейной системы линейной системою.

Замечание 2. В случае сходимости последовательности (12) или (15), с каждым шагом управление уточняется, поэтому выполнив необходимое количество шагов, получим управление, решающее двухточечную задачу для нелинейной системы (8) с заданной степенью точности.

4. Приближенные решения задач 1,2.

Проведенные с помощью ЭВМ вычисления показали существование окрестности положения равновесия (4), в которой последовательность управлений (15) сходится. Так, поставим задачу перевода носителя в противовращение.

Найти управление $u = u(t), t \in [0,1]$ такое, что соответствующее ему движение динамической системы (1) удовлетворяет условиям

$$\boldsymbol{\omega}^T(t_0) = (1/3, 1/4, (-2)/3),\ \mathbf{q}^T(t_0) = (\pi/6, \pi/6) \tag{16}$$

$$\boldsymbol{\omega}^T(t_1) = ((-1)/3, (-1)/4, 2/3)$$

с точностью до 0,00001.

В результате построения управлений по формуле (15) на шаге k=20 имеем управление

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} c_1 \cos[e(1-t)] + c_2 \sin[e(1-t)] + c_3 \\ d_1 \cos]e(1-t)] + d_2 \sin[e(1-t)] + d_3 \end{pmatrix}$$

$$e = 1.6282109,$$

$$\mathbf{c} = (-0.8590590,\ 0.77076627,\ 0.395063765),$$

$$\mathbf{d}=(0.756214007,\ -0.678491435,\ 0.28125141)$$

непосредственной подстановкой которого в динамическую систему (1) и решением полученной системы уравнений, убеждаемся, что решение удовлетворяет условиям (16) с заданной степенью точности.

В случае задачи ориентации носителя в заданном направлении, последовательность существующих управлений (15) также сходится в малой окрестности положения равновесия (5), где $S_1^{(0)}, S_2^{(0)}, S_3^{(0)}$ любые, удовлетворяющие условиям (7).

В результате применения указанного алгоритма построения управления для нелинейной системы получаем непрерывное управление. Благодаря тому, что в этом случае имеем целую плоскость положений равновесий

$$\mathbf{P} = \{\mathbf{y} : \omega_1 = 0, \omega_2 = 0, \omega_3 = 0\},$$

для любых двух направлений $S_1^{(0)}, S_2^{(0)}, S_3^{(0)}$ и $S_1^{(1)}, S_2^{(1)}, S_3^{(1)}$, $S_3 > 0$ (или $S_3 < 0$) можно построить кусочно-непрерывное управление, решающее задачу ориентации носителя с заданной степенью точности. Для этого соединим их кривой

$$S_1 = S_1^{(0)}(1-\eta) + S_1^{(1)}\eta\,,\quad S_2 = S_2^{(0)}(1-\eta) + S_2^{(1)}\eta\,,\quad S_3 = 1 - \sqrt{(S_1)^2 - (S_2)^2}\,,\ 0 \le \eta \le 1\,. \qquad (17)$$

Далее разбиваем кривую на точки на столько мелко, чтобы для каждых двух точек задача ориентации носителя имела решение, т.е. последовательность (15) сходилась, и строим на каждом кусочке по указанному алгоритму непрерывное управление. Искомое управление будет кусочно-непрерывным. Систему линейного приближения на каждом шаге целесообразно строить в положении равновесия, лежащем между выбранными точками кривой (17), что позволяет обеспечить сходимость при менее мелком разбиении, чем в других случаях.

Описанным способом найдено управление

$$\mathbf{u}(\mathbf{t}) = \left| \begin{array}{l} \mathbf{u}_1(\mathbf{t}),\ \textit{если}\ 0 \le t < 2 \\ \mathbf{u}_2(\mathbf{t}),\ \textit{если}\ 2 \le t < 4 \\ \mathbf{u}_3(\mathbf{t}),\ \textit{если}\ 4 \le t < 5 \\ \mathbf{0} \quad \textit{в остальных случаях.} \end{array} \right. \qquad (18)$$

$$\mathbf{u}_i(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} c_{i,1} \cos[e_i(0_i - t)] + c_{i,2} \sin[e_i(o_i - t)] + c_{i,3}[t - 2(i-1)] + c_{i,4} \\ d_{i,1} \cos[e_i(0_i - t]) + d_{i,2} \sin[e_i(0_i - t)] + d_{i,3}[t - 2(i-1)] + d_{i,4} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{O} =(2,\ 4,\ 5)$$

$$\mathbf{e} = (1.3354110077,\ 1.34437321722,\ 1.3535870385)$$

$$C = \begin{pmatrix} -0.0077372 & -0.023142 & 0.04679 & -0.02798053 \\ -0.0082648 & -0.0232266 & 0.0617 & -0.0428 \\ -0.637145 & -0.446164 & 1.1694 & 0.13589 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0.0146755 & 0.043894 & 0.01923199 & -0.050144 \\ 0.0154275 & 0.043356 & 0.025761 & -0.0561956 \\ 1.17054 & 0.819827 & 0.4958355 & -1.5621185 \end{pmatrix}$$

решающее задачу поворота носителя из состояния

$$\boldsymbol{\omega}^T(0) = 0,\ \mathbf{s}^T(0) = (0.7, 0.7, 0.141421),\ \mathbf{q}^T(0) = (\pi/6, \pi/12) \tag{19}$$

в состояние

$$\boldsymbol{\omega}^T(5) = 0,\ \mathbf{s}^T(5) = \left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0\right)$$

с точностью до 0.00001.

При построения управлений, решающих поставленные задачи, для констант в уравнении (1) выбраны следующие значения

$$A_1 = 125\cdot 10^3,\ A_2 = 142\cdot 10^3,\ A_3 = 123\cdot 10^3,\ h_1 = 160\cdot 10^3,\ h_2 = 135\cdot 10^3.$$

Справедливость решения (18) можно проверить непосредственной его подстановкой в систему (1)-(2) и решением её с начальным условием (19).

1. *Гладун А.В.* Об отностиельной управляемости динамических систем по линейному приближению // Труды Инст. Прикл. мат. и механики. – 1998. Том 2. – с.21-31.

2. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. – М.: Наука, 1975. – 496 с.

3. *Смирнов Е.Я., Павлинов В.Ю., Щербаков П.П., Юрков А.В.* Управление движением механических систем. – Л.: Издательство Л.Г.У., 1985. – 313с.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк.