УДК 531.38

© А. В. Гладун

ОБ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПО ЛИНЕЙНОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ.

Исследуется задача об управляемости динамических систем по части переменных, часто возникающая в ситуации их неуправляемости по всем переменным. Введено понятие относительной управляемости или управляемости относительно множества. Это понятие рассмотрено в начале применительно к линейным системам, для которых получены критерий относительной управляемости и явный вид решения двухточечной задачи, оптимального по норме. Для нелинейных систем доказана теорема об относительной управляемости по линейному приближению. Полученные результаты применены к исследованию управляемости системы, состоящей из носителя и спарок гиродинов.

1. Постановка задачи. Рассмотрим автономную динамическую систему, движение которой на отрезке $T=[t_0,t_1]$, $t_1-t_0>0$ можно описать системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=f(x,u). \tag{1}$$

Здесь $x^*=(x_1,...,x_n)$ – вектор, характеризующий состояние системы, $u^*=(u_1,...,u_r)$ – управление, $u\in U$, где U – класс измеримых на отрезке Т функций, t – время, * – знак транспортирования.

Пусть динамическая система (1) неуправляема по всем переменным. Рассмотрим задачу об ее управляемости по части переменных.

Вначале представим вектор состояния системы в следующем виде $x^*=(x_1,...,x_n)=(y_1,...,y_m,z_1,...,z_p)=(y,z)$, $m>0$, $p>0$, $n=m+p$, тогда уравнение (1) можно переписать как

$$\dot{y}=f_1(y,z,u), \qquad \dot{z}=f_2(y,z,u), \tag{2}$$

где $f^*(x,y)=(f_1(y,z,u),f_2(y,z,u))$.

Задача относительной управляемости [7] состоит в том, что необходимо найти управление $u(t)\in U$, $t\in T$, переводящее систему (2) из точки x^0 пространства E_n в произвольную точку некоторой плоскости размерности $n-m$. Эта плоскость состоит из всех точек E_n, для которых выполнено условие $y(t_1)=y^1$. При этом от конечных значений переменных $z_1,...,z_p$ требуется только ограниченность.

Совокупность всех точек E_n, для которых выполнено условие $y(t_1)=y^1$ можно задать с помощью некоторой матрицы D по правилу

$$W=\{\,x\in E_n\ :\ Dx=y^1\,\}, \tag{3}$$

где $(m\times n)$ – матрица D, $rang\,D=m$, отделяет переменные y, относительно которых изучается управляемость системы (2), от переменных z. Заметим, что выбирая произвольные матрицы D, можно получить не только плоскости, в которых координаты $y_1,...,y_m$ постоянны, но и плоскости в которых некоторые соотношения между координатами вектора x постоянны. Это позволяет расширить поставленную задачу.

Определение 1. Если для произвольных заданных T, x^0, y^1 существует управление $u(t)\in U$ такое , что соответствующее ему движение $x(t)$ системы (1) удовлетворяет условиям

$$x(t_0)=x^0,\ Dx(t_1)=y^1, \tag{4}$$

то система (1) называется вполне управляемой относительно множества W (или просто – относительно вполне управляемой).

Если в качестве постоянной y^1 выбрать нуль, то множество

$$W_0=\{x\in E_n\ :\ Dx=0\} \tag{5}$$

является подпространством пространства E_n. Далее подпространство W_0 будет играть важную роль в исследовании относительной вполне управляемости нелинейных динамических систем по линейному приближению, где потребуются следующие определения [2].

Определение 2. Состояние x^0 динамической системы (1) называется вполне управляемым относительно подпространства W_0, если при любом T найдется управление $u(t) \in U$ такое, что соответствующее ему движение $x(t)$ удовлетворяет условиям

$$x(t_0) = x^0, \qquad Dx(t_1) = 0. \tag{6}$$

Определение 3. Динамическая система (1) называется локально вполне управляемой относительно пространства W_0, если существует число α такое, что все состояния из

$$\{ x : \| x \| \le \alpha \} \tag{7}$$

являются вполне относительно управляемыми.

2. Относительная управляемость линейных систем. Исследуем частный случай, когда динамическая система (1) имеет вид

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{8}$$

где A и B постоянные, действительные $(n \times n)$ и $(r \times n)$ – матрицы. Найдем решение задачи о вполне управляемости линейной динамической системы (8) относительно множества (3).

Обозначим через $\omega(t,\xi)$ $(m \times r)$ – матрицу, задаваемую следующим равенством

$$\omega(t,\xi) = DX[t,\xi]B$$

где $X[t,\xi]$ – фундаментальная матрица однородной системы уравнений, соответствующей исходной системе (8). Тогда элементы матрицы $\omega(t,\xi)$ определяются равенствами

$$\omega_{k\,l}(t,\xi) = \sum_{j=1}^{n} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} d_{ki} x_{ij}[t,\xi] \right) b_{jl} \right] \quad (k = 1,...,m;\ l = 1,...,r).$$

В дальнейшем введенную матрицу $\omega(\mathrm{t},\xi)$ будем понимать как матрицу столбец $\omega^*(t,\xi) = \left(\omega_1(t,\xi),...,\omega_m(t,\xi)\right)$, элементы которого суть вектор-функции $\omega_i(t,\xi)$, имеющие вид $\omega_i(t,\xi) = (\omega_{i1}(t,\xi), \ldots, \omega_{ir}(t,\xi))$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Теорема 1. для того чтобы динамическая система (8) была вполне управляемой относительно множества W необходимо и достаточно, чтобы вектор-функции

$$\omega_1(t,\xi),\ \omega_2(t,\xi),\ \ldots,\ \omega_m(t,\xi) \tag{9}$$

были линейно независимыми на всяком произвольном промежутке $[t_0, t_1]$.

Доказательство. а) Достаточность. возьмем произвольные точку x^0 пространства E_n, отрезок времени $[t_0, t_1]$ и произвольное множество W вида (3). Покажем, что существует управление $u(t) \in U$ такое, что соответствующее ему движение удовлетворяет условиям (4), если вектор-функции (9) линейно независимые на $[t_0, t_1]$.

Решая по формуле Коши [4] систему уравнений (8) с начальным условием $x(t_0) = x^0$, удовлетворяем первое условие из (4). Далее для обеспечения условия $Dx(t_1) = y^1$ достаточно существования такой вектор-функции $u(t)$, при которой выполняется равенство

$$Dx(t_1) = DX[t_1, t_0]x^0 + \int_{t_0}^{t_1} DX[t_1, \tau]Bu(\tau)d\tau$$

или иначе, через функцию $\omega(t,\xi)$

$$\int_{t_0}^{t_1} \omega(t_1, \tau)\, u(\tau)\, d\tau = y^1 - DX[t_1, t_0]x^0. \tag{10}$$

Видим, что такая функция $u(t)$ существует и имеет вид [4]

$$u^0(t) = \omega^*(t_1, t)\, l^{(0)} \tag{11}$$

где $l^{(0)}$ – некоторый m-мерный вектор. Действительно, подставив $u^0(t)$ в равенство (10), получим систему алгебраических уравнений относительно компонент вектора $l^{(0)}$

$$\int_{t_0}^{t_1} \omega\,(\,t_1,\tau)\,\omega^*(\,t_1,\tau)\,d\tau\, l^{(0)} = c \qquad (12)$$

где через c обозначена правая часть уравнения (10). Осталось показать, что определитель системы (12) отличен от нуля. Для этого заметим, что для произвольного m-мерного вектора l $\left(\| l \| > 0\right)$, при условии линейной независимости векторов (9), справедливы соотношения

$$\int_{t_0}^{t_1} \| \omega^*(t_1,\tau)\, l \|^2 \; d\tau \;=\; l^* \int_{t_0}^{t_1} \omega\,(t_1,\tau)\,\omega^*(t_1,\tau)\,d\tau\, l > 0\,,$$

означающие, что матрица $\int_{t_0}^{t_1} \omega\,(t_1,\tau)\,\omega^*(t_1,\tau)\,d\tau$ положительно определена и, следовательно, из критерия Сильвестера имеет неравенство

$$\det \int_{t_0}^{t_1} \omega\,(t_1,\tau)\,\omega^*(t_1,\tau)\,d\tau > 0\,.$$

Таким образом, учитывая невырожденность матрицы в системе уравнений (12), получим в результате, что

$$l^{(0)} = \left(\int_{t_0}^{t_1} \omega\,(t_1,\tau)\,\omega^*(t_1,\tau)\,d\tau \right)^{-1} c\,,$$

а это вместе с формулой (11) позволяет найти функцию управления для решения поставленной задачи в явном виде

$$u^0(t) = \omega^*(t_1,t) \left(\int_{t_0}^{t_1} \omega\,(t_1,\tau)\,\omega^*(t_1,\tau)\,d\tau \right)^{-1} \left(y^1 - DX[t_1,t_0]\,x^0 \right) \qquad (13)$$

б) Необходимость. (от противного). Пусть вектор-функции (9) при $t = t^1$ на некотором интервале $[t_0,\, t_1]$ линейно зависимые. Несмотря на это, специальным подбором функции $u(t)$, можно обеспечить выполнение произвольных краевых условий (4), т.е. условий (10). Из линейной зависимости вектор-функций (9) следует справедливость равенства

$$l^*\omega\,(t_1,\tau\,) \equiv 0 \;\; (\tau \in [t_0,t_1]\,)\,, \qquad (14)$$

где l – некоторый специально подобранный m-мерный постоянный вектор $\left(\| l \| > 0\right)$. Произвольные точки x^0, y^1 выберем из условия $l^*\left(y^1 - D\,X[t_1,t_0]\,x^0\right) \neq 0$. Теперь из тождества (14) следует, что для произвольной функции $u(t)$ справедливо равенство $l^* \int_{t_0}^{t_1} \omega\,(t_1,\tau)\;\; u(\tau\,)\,d\tau \equiv 0$, а потому

$$l^* \int_{t_0}^{t_1} \omega\,(t_1,\tau)\,u(\tau\,)\,d\tau \;\neq\; l^*\left(y^1 - D\,X[t_1,t_0]\,x^0\right)$$

или

$$\int_{t_0}^{t_1} \omega\,(t_1,\tau)\,u(\tau\,)\,d\tau \;\neq\; \left(y^1 - DX[t_1,t_0]x^0\right)$$

т.е. получили противоречие.

Замечание 1. В ходе доказательства теоремы 1 построено управление, решающее двухточечную задачу для линейных систем (8). Это управление задается формулой (13).

Замечание 2. Как видно из доказательства, в частности из уравнения (10), полученное управление $u^0(t)$ не единственная функция управления, обеспечивающая выполнение краевых условий (4). При этом, среди всех решений $u\,(t)$, найденное управление $u^0(t)$ является оптимальным в смысле минимальности «энергии» управляющего воздействия. Это означает, что

$$\int_{t_0}^{t_1} \| u(t) \|^2 \, dt > \int_{t_0}^{t_1} \| u^0(t) \|^2 \, dt , \; \| u(t) \|^2 = \sum_{k=1}^{r} u_k^2(t) . \tag{15}$$

Справедливость неравенства (15) следует из равенства

$$\| u(t) \|^2 - 2u^{0*} \left(u(t) - u^0(t) \right) = \| u^0(t) \|^2 + \| u(t) - u^0(t) \|^2 .$$

Необходимые и достаточные условия вполне управляемости системы (8), сформулированные в теореме 1 , неудобны для исследования конкретных систем управления, так как не выражаются непосредственно через матрицы A, B и D. Следующая теорема устраняет это неудобство.

Теорема 2. Чтобы линейная динамическая система (8) была вполне управляемой относительно множества W необходимо и достаточно, чтобы

$$rang\{DB, DAB, ..., DA^{n-1}B\} = rang\{D\} .$$

Доказательство теоремы 2 опирается на утверждение теоремы 1 и аналогично известным доказательствам [4] [5] теоремы о вполне управляемости линейной стационарной системы (8), т.е. по всем переменным. Следует просто вместо функции $\omega(t,\xi) = X[t,\xi]\, B$ использовать всюду в рассуждениях функции $\omega(t,\xi) = DX[t,\xi]$, а вместо матрицы $\{B, AB, ..., A^{n-1}B\}$ матрицу $\{DB, DAB, ..., DA^{n-1}B\}$.

Пример 1. Рассмотрим динамическую систему, движение которой описывается линейной системой уравнений

$$\dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 , \;\; \dot{x}_2 = x_1 + 2x_3 + u , \;\; \dot{x}_3 = x_3 \tag{16}$$

Очевидно, что система (16) неуправляема по всем переменным x_1, x_2, x_3. Исследуем ее управляемость относительно переменных x_1, x_2 . т.е.

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда по теореме 2 получаем $rang\{ DB, DAB, DA^2B \} = 2 = rang\{D\}$. Следовательно, система (16) управляема относительно множества $W_1 = \{x \in E_3 : x_1 = c_1, x_2 = c_2\}$, где $c_i \equiv const, i = 1,2.$ Если же выбрать

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то $rang\{DB, DAB, ..., DA^2B\} = 1 \neq rang\{D\}$, значит система (16) не управляема относительно множества $W_2 = \{x \in E_3 : x_1 = c_1, x_3 = c_3\}$.

Опираясь на свойство управляемости системы (16) относительно W_1 поставим задачу о нахождении управления $u = u(t)$, $t \in [0,1]$, переводящего систему (16) из состояния $x^{0*} = (4, 0, 2)$ в точку множества $W_3 = \{x \in E_3 : x_1 = 0, x_2 = 1\}$. Из замечания 1 следует, что управление определяется формулой (13) и имеет вид $u(t) = (24,5 - 70,4t)\, e^{1-t}$.

Множество достижимости линейных неуправляемых систем.

Определение 4. Множество достижимости $K(t_1)$ системы (8) представляет собой множество тех точек из E_n, которые могут быть достигнуты за время $t_1 - t_0$, если исходить из начального состояния x^0, под действием управлений $u(t) \in U$.

Лемма 1. Множество достижимости $K(t_1)$ линейной неуправляемой системы лежит в плоскости, параллельной инвариантному подпространству K_S, проходящей через точку x^0 и имеет размерность, совпадающую с размерностью подпространства K_S .

Доказательство. Пусть задана линейная неуправляемая система (8), тогда $rang\{ B, AB, ..., A^{n-1}B \} = \dim K_S = s, s < n$. Выполним неособое преобразование $x=Tv$ [4], где матрицу T = $\{t_{ij}\}$ определим следующим образом: в качестве первых s столбцов $t^{(i)} = \{t_{ij}\}$ $(i = 1,...,s)$ возьмём линейно независимые векторы $k^{[1]}$. …$k^{[S]}$ столбцы матрицы $\{ B, AB, ..., A^{n-1}B \}$, а в качестве остальных (n-s) столбцов возьмём любые векторы $t^{(l)} = \{t_{lj}\}$ $(l = s+1,...,n)$, подчинённые лишь тому правилу, чтобы все векторы $t^{(i)}$ $(i = 1,...,n)$ были линейно независимы. Как следует из леммы 19.3 [4], в новых переменных система (8) запишется так

$$\dot{y} = Cy + Ez + Fu, \qquad \dot{z} = Gz, \tag{17}$$

где C, E, G, F соответственно матрицы размерностей ($s \times s$), ($s \times p$), ($p \times p$), ($s \times r$), где $p = n\text{-}s$. Причём в новых переменных по той же лемме плоскость

$$z_1 = 0,\ \ z_2 = 0,\ ...,\ z_P = 0$$

и есть инвариантное подпространство K_S системы (8). Теперь из вида системы (17) имеем, что если $x^0 = (y^0, z^0) \notin K_S$, то при любом $u(t) \in U$ значение переменных z в момент времени t_1 постоянно − $z(t_1) = Z[t_1, t_0] z^0$, (где $Z[t, \tau]$ фундаментальная матрица системы $\dot{z} = Gz$), а $y(t_1) \in E_S$. Следовательно, множество достижимости $K(t_1)$ лежит в плоскости $z(t_1) = Z[t_1, t_0]\, z^0 = const$, которая проходит через точку $Z[t_1, t_0]\, z^0$ и параллельна K_S. Если же $x^0 \in K_S$, то в силу инвариантности K_S, $x(t_1) \in K_S$ при любых управлениях $u(t) \in U$. Тогда множество $K(t_1)$ лежит в подпространстве K_S.

4. Относительная управляемость по линейному приближению. В общем случае нелинейной динамической системы (1), если функция $f(x,u)$ непрерывно-дифференцируема в некотором шаре $H_\delta = \{(x,u) : \sqrt{\|x\|^2 + \|u\|^2} \le \delta\}$ с центром в точке $x = 0, u = 0$ пространства E_{n+r} и выполнено условие $f(0,0) = 0$, рассматриваем её линейное приближение – линейную систему (8), где матрицы A и B имеют вид

$$A = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\u=0}} \qquad B = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{\substack{x=0\\u=0}} \tag{18}$$

Если динамическая система (8), (18) не является управляемой по всем переменным $x_1.....x_n$, то возникает задача об относительной управляемости системы линейного приближения, а также и исходной нелинейной динамической системы (1). Оказывается из относительной вполне управляемости системы линейного приближения (8), (18) следует локальная вполне управляемость исходной системы (1) относительно подпространства W_0.

Теорема 3. Пусть выполнены условия

1) $f(x,u) \in C^2(H_\delta), H_\delta \subset E_{n+r}$;

2) $f(0,0) = 0$;

3) $rang\{DB, DAB, ..., DA^{n-1}B\} = rang\{D\}$,

$$A = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\u=0}} \qquad B = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{\substack{x=0\\u=0}},$$

тогда динамическая система (1) локально вполне управляема относительно подпространства W_0.

Доказательство. Линеаризуя систему (1) по x, u в шаре H_δ и учитывая условия 1), 2) теоремы, получим, что систему (1) можно заменить системой

$$\dot{x} = Ax + Bu + R_2(x,u)\,, \tag{19}$$

где A, B имеют вид (18),

$$R_2(x,u) = o(\sqrt{\|x\|^2 + \|u\|^2})\,. \tag{20}$$

Из условия 3) теоремы по теореме 2 система линейного приближения (8), (18) относительно вполне управляема, а значит управляема и относительно подпространства W_0, то есть для любых $T = [t_0 . t_1]$, x^0 существует $u = u^0(t) \in U$ такое, что соответствующее движение $x(t)$ системы (8), (18) удовлетворяет условиям (6). Управление $u^0(t)$ определим формулой (13). Далее покажем, что если начальное состояние x^0 принадлежит шару (7) с некоторым фиксированным α, то существует управление $u = \widetilde{u}(t) \in U$, решающее задачу об локальной вполне управляемости системы (19) относительно подпространства W_0, причем найденное $\widetilde{u}(t)$ и соответствующее ему решение системы (19) $x = \widetilde{x}(t)$ принадлежат шару H_δ при $t \in T$. Тогда это же управление $\widetilde{u}(t)$ будет решением и исходной задачи об локальной вполне управляемости системы (1) относительно W_0.

Введём новое управление

$$\tilde{u}(t) = u^0(t) + \hat{u}(t),\ \ t \in T \tag{21}$$

где через $\hat{u}(t)$ обозначены всевозможные управления из U, стеснённые ограничением $\|\hat{u}(t)\| \le c\, \|x^0\|\ \forall t \in T$, c − некоторая постоянная.

Справедливы неравенства

$$\|u^0(t)\| \le c_0\, \|x^0\|\ \ \forall t \in T\,, \tag{22}$$

$$\|\tilde{x}(t)\| \le l_0\, \|x^0\|\ \ \forall t \in T\,, \tag{23}$$

где

$$c_0 = m^3 \sqrt{r} \alpha\beta\omega\,, \quad l_0 = r^0 c_2 \exp(r^0 \varepsilon_R(\delta)\,(t_1 - t_0))\,,$$

$$\alpha = \max \left| \left[\left(\int_{t_0}^{t_1} \omega(t_1,\tau)\, \omega^*(t_1,\tau)\, d\tau \right)^{-1} \right]_{ij} \right| \qquad \big(i = 1,...,m;\ j = 1,...,n\big)$$

$$\beta = \max \left| DX[t_1,t_0]_{ij} \right|; \qquad (i = 1,...,m;\ j = 1,...,n)$$

$$\omega = \max_{t \in T} \left| \omega_{ij}(t_1,t) \right| \qquad (i = 1,...,r;\ j = 1,...,m)$$

$$r^0 = 1 + c_1(c_0 + c)\big(\|B\| + \varepsilon_R(\delta)\big)(t_1 - t_0)\,, \quad \varepsilon_R(\delta) = \sup_{H_\delta} \|\varepsilon_R(x,u)\|,$$

$$R_2(x,u) = \varepsilon_R(x,u)\, \sqrt{\|x\|^2 + \|u\|^2}, \qquad \left\| X\left[t,t_0\right] \right\| \le c_1\ \ \forall t \in T,$$

$$\|\omega(t,\tau)\| \le c_2\ \ \forall t,\tau \in T.$$

Определим

$$\varepsilon = \delta \Big/ \left(\sqrt{l_0^2 + (c_0 + c)^2} \right), \tag{24}$$

тогда, если начальное состояние x^0 принадлежит шару (7) с $\alpha = \varepsilon$, то любое управление вида (21) и соответствующее ему решение $\widetilde{x}(t)$ принадлежит шару H_δ.

По формуле Коши для решений $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ системы (8), (18) при управлениях $u = u^0(t)$ и $\widetilde{u}(t)$ соответственно имеем

$$\|\hat{x}(t_1) - x(t_1)\| = \left\| \int_{t_0}^{t_1} X\left[t_1,\tau\right] B\hat{u}(\tau)\, d\tau \right\| \le kc\varepsilon\,,$$

где $k = c_2 \|B\|(t_1 - t_0)$, $Dx(t_1) = 0$. Следовательно, под действием управлений (21) концы траекторий $\hat{x}(t)$ пробегают множество достижимости

$$\{x(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} X[t_1, \tau] B\hat{u}(\tau)\, d\tau : \|\hat{u}(t)\| \le c\, \|x^0\|\}.$$

Это множество достижимости по Лемме 1 лежит в плоскости, параллельной инвариантному подпространству K_S (или в самом K_S) и в силу непрерывной зависимости решения от параметров содержит s-мерный шар H радиуса $k_0 c\varepsilon$, $k_0 \le k$ с центром в точке $x(t_1)$. Шар H есть пересечение n-мерного шара $\| x - x(t_1) \| \le k_0 c\varepsilon$, $k_0 \le k$ с плоскостью размерности s, проходящей через центр n-мерного шара $x(t_1)$ параллельно инвариантному подпространству K_S. Выберем из управлений $\hat{u}(t)$ такие, что концы соответствующих им решений $\hat{x}(t_1)$ будут пробегать сферу S_1 радиуса $k_0 c\varepsilon$ − границу шара H. Обозначим их $\hat{u}_C$. Пусть **OG** есть вектор, соединяющий точку $x(t_1)$ и точку **G**, принадлежащую сфере S_2 радиуса k_0, где S_2 получается из S_1 подобным преобразованием с центром подобия $x = x(t_1)$ и коэффициентом подобия $c\varepsilon$. Тогда все $\hat{x}(t_1)$, соответствующие управлениям $\hat{u}_C$ запишутся в виде [1]

$$\hat{x}(t_1) = c\varepsilon\, \mathbf{OG}. \tag{25}$$

Обозначим через β угол между плоскостью $Dx = 0$ и инвариантным подпространством K_S, тогда расстояние ρ от точек сферы S_1 до плоскости $Dx = 0$ будет

$$\rho \ge c\varepsilon\, \mathbf{OG} \sin\beta \tag{26}$$

Далее непосредственным дифференцированием убеждаемся, что система (19) эквивалентна следующей системе интегральных уравнений [3]

$$x(t) = X[t, t_0] x^0 + \int_{t_0}^{t_1} X[t_1, \tau]\, d\tau + \int_{t_0}^{t_1} X[t_1, \tau] R_2(x(\tau), u(\tau))\, d\tau .$$

При $t = t_1$, выбирая $\tilde{u}(t), t \in T$ для всех $\tilde{x}(t)$, $\tilde{u}(t)$ имеем

$$\tilde{x}(t_1) = \hat{x}(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} X[t_1, \tau] R_2(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))\, d\tau$$

где из (20), (22), (23) и неравенств

$$\frac{|R_2(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))|}{\sqrt{\|\tilde{x}(t)\|^2 + \|\tilde{u}(t)\|^2}} \ge \frac{|R_2(\tilde{x}(t), u(t))|}{\varepsilon\sqrt{l_0^2 + (c_0 + c)^2}} \ge 0$$

путём предельного перехода при $\|x\| \to 0$, $\|u\| \to 0$, получаем

$$R_2(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) = o(\varepsilon)$$

и имеем представление для решений системы (19) в шаре $H_\delta : \tilde{x}(t_1) = \hat{x}(t_1) + o(\varepsilon)$. Или учитывая равенство (25)

$$\tilde{x}(t_1) = c\varepsilon\, \mathbf{OG} + o(\varepsilon) \tag{27}$$

В итоге, когда точка **G** пробегает сферу S_2, точка $\tilde{x}(t_1)$ пробегает замкнутую и непрерывную поверхность L, близкую к сфере S_1 и деформированную на $o(\varepsilon)$, что следует из (27) и условия 1) теоремы. Эта поверхность L является границей некоторого непрерывного множества $\tilde{H}$ решений $\tilde{x}(t_1)$ системы (19), соответствующих управлениям (21). Если выбрать

$$c = \frac{1}{\sin\beta},\ \|\hat{u}(t)\| \le \frac{\varepsilon}{\sin\beta},\ t \in T\,, \tag{28}$$

то плоскость $Dx = 0$ пересекает множество H. Действительно, плоскость $Dx = 0$ пересекает центр шара H (так как $Dx(t_1) = 0$). Любая точка границы H – сферы S_1 находится от плоскости $Dx = 0$ в силу (26), (28) на расстоянии $\rho \ge \varepsilon\, \mathbf{OG}$, а любая точка границы L множества $\tilde{H}$ в силу (26), (27), (28) на расстоянии $\rho \ge \varepsilon\ \mathbf{OG} + o(\varepsilon)$. Тогда плоскость $Dx = 0$ не может выйти за границу L и в силу условия 3 теоремы пересекает $\widetilde{H}$. Следовательно, существует управление $\widetilde{u}(t)$ такое, что конец соответствующего ему решения $\widetilde{x}(t_1)$ принадлежит плоскости $Dx = 0$.

Замечание 3. Как видно из равенств (28), (24), система (1) будет относительно управляемой в шаре (7) с наибольшим радиусом α, когда угол β между плоскостью $Dx = 0$ и подпространством K_S равен $\pi/2$. Причём, шар (7) стягивается в точку $x = 0$ при $\beta \to 0$, но $\beta \ne 0$ так как в этом случае условие 3) теоремы 3 не будет выполняться.

5. Управление твёрдым телом с помощью спарок гиродинов. Рассмотрим динамическую систему, состоящую из твёрдого тела (носителя) и двух спарок гиродинов. Объединённые в спарку гиродины идентичны, оси вращения гирокамер параллельны, гирокамеры вращаются в противоположных направлениях. Роторы спарки вращаются с постоянными, одинаковыми по величине и противоположными по направлению скоростями. Пусть *Oxyz* есть главная центральная система координат для носителя, а k_1 и k_2 – орты, ортогональные к ортам вращения гирокамер и роторов соответственно первой и второй спарок гиродинов. Установим спарки гиродинов в носителе так, чтобы орт k_1 был направлен по оси *Ox*, а орт k_2 по оси *Oy*, тогда движение системы описывается следующими уравнениями [6]

$$\begin{aligned}
&\dot{\omega}_1 = \left[(A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + 2h_2\omega_3\sin q_2 - 2h_1u_1\cos q_1\right] / A_1\\
&\dot{\omega}_1 = \left[(A_3 - A_1)\omega_1\omega_3 - 2h_1\omega_3\sin q_1 - 2h_2u_2\cos q_2\right] / A_2\\
&\dot{\omega}_1 = \left[(A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + 2h_1\omega_2\sin q_1 - 2h_2\omega_1\sin q_2\right] / A_3\\
&\dot{q}_1 = u_1, \dot{q}_2 = u_2
\end{aligned} \tag{29}$$

где $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ − вектор угловой скорости носителя относительно инерциального пространства: q_1, q_2 − углы поворота соответственно первой и второй спарок относительно осей их гирокамер; u_1, u_2 − управления; h_1, h_2 − некоторые постоянные.

Так как у системы (29) существует интеграл

$$\left(A_1\omega_1 + 2h_1\sin q_1\right)^2 + \left(A_2\omega_2 + 2h_2\sin q_2\right)^2 + \left(A_3\omega_3\right)^2 = const,$$

то динамическая система (29) не является управляемой по всем переменным. Рассмотрим для данной системы задачу управляемости по угловой скорости в окрестности точки $x^{p*} = (0, 0, 0, q_{10}, q_{20})$, где q_{10}, q_{20} − постоянные. Очевидно, что $f(x^{p*}, 0) = 0$. Воспользуемся теоремой 3.

Видим, что условия 1) и 2) теоремы 3 для системы (29) выполнены, осталось проверить справедливость условия 3) теоремы.

Действительно, если выбрать $D = E_3$, то при условии, что

$$h_1h_2\cos q_{10}\cos q_{20}\sin q_{20} \ne 0 \quad \text{или} \quad h_1h_2\cos q_{10}\cos q_{20}\sin q_{10} \ne 0$$

$$\text{имеем} \quad rang\{DB, DAB, ..., DA^4B\} = rang\{C_1, C_2, C_3, C_4\} = rang\{D\} = 3.$$

Здесь

$$\begin{aligned}
C_1^* &= ((2h_1\cos q_{10})/A_1,\ 0,\ 0);\\
C_2^* &= (0,\ (-2h_2\cos q_{20})/A_2,\ 0);\\
C_3^* &= (0,\ 0,\ (4h_1h_2\sin q_{20}\cos q_{10})/A_1A_3);\\
C_4^* &= (0,\ 0,\ (-4h_1h_2\sin q_{10}\cos q_{20})/A_2A_3).
\end{aligned}$$

Итак, если $q_{i0} \ne \pi/2 + \pi n$, (i = 1, 2) и хотя бы одна из q_{10}, q_{20} не равна πn, то динамическая система (29) локально управляема относительно подпространства

$$W_0 = \{x \in E_5; \omega_1 = 0, \omega_2 = 0, \omega_3 = 0\}.$$

Это означает, что существует число α такое, что если $x^0 \in \{x : \left\|x - x^{p*}\right\| \le \alpha\}$, то систему (29) можно с помощью некоторых измеримых управлений за время $t_1 - t_0$ перевести в состояние $x(t_1)$, в котором $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$, т.е. система (29) обладает свойством локальной управляемости по угловой скорости.

1. *Болтянский В. Г.* Математические методы оптимального управления. − М.: Наука, 1966. − 307с.
2. *Габасов Р. Кириллова Ф.* Качественная теория оптимальных процессов. − М.: Наука, 1971. − 507с.
3. *Еругин Н.П. Штокайло И.З*. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Головное издательство, 1974. – 472с.
4. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. – М: Наука, 1968. – 476с.
5. *Ли Э.Б.*, *Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. – М: Наука, 1972. – 576с.
6. *Смирнов Е.Я., Павлинов В.Ю., Щербаков П.П, Юрков А.В*. Управление движением механических систем. – Л.: Издательство ЛГУ, 1985. – 313с.
7. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. – М.: Наука, 1987. – 712с.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк.