КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

ВИПУСК №1 2011

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНИКА

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ИНФОРМАТИКА

(The Proceedings of International Conference "Theoretical and Applied Aspects of Program Systems Development")

РАДІОФІЗИКА

СУЧАСНА ФІЗИКА

УДК 519.6

Пряничникова О.О.*

Алгебра мов, що можуть бути представлені в помічених графах

В останні роки в комп'ютерних науках інтенсивно використовуються скінченні орієнтовані графи з поміченими вершинами. В даній статті ми вводимо алгебру мов, що можуть бути представлені в таких графах, і досліджуємо її властивості. На відміну від алгебри регулярних мов, яка здебільшого використовується для графів з поміченими дугами (скінченних автоматів), запропонована алгебра є зручним засобом для дослідження властивостей мов, що можуть бути представлені в графах з поміченими вершинами. В статті для графів з поміченими вершинами доведено теореми, що є аналогами теореми Кліні і теореми Майхіла-Нерода для скінченних автоматів. Розроблено методи аналізу та синтезу мов, що можуть бути представлені в графах з поміченими вершинами, способи детермінізації та мінімізації таких графів. Для введеної алгебри запропонована скінченна система аксіом, доведена її повнота.

Ключові слова: граф, аналіз, синтез, детермінізація, мінімізація.

E.A. Pryanichnikova*

An Algebra of Languages Representable in Vertex-Labelled Graphs

Recently directed finite vertex-labelled graphs have been successfully applied to the diverse areas of computer science, robotics, etc. In this paper we introduce and study an algebra of languages representable by vertex-labelled graphs. In contrast to Kleene algebra of regular languages, which is mainly used for edge-labelled graphs, it can adequately represent many properties of languages generated by vertex-labelled graphs. We prove an analog of Kleene's theorem establishing equivalence of regular expressions in this algebra and vertex-labelled graphs and an analog of the Myhill-Nerode theorem giving the necessary and sufficient conditions for the languages to be representable by a class of directed vertex-labelled graphs. We give several basic constructions, including methods for obtaining of a regular expression in this algebra from vertex-labelled graph and vice versa, determinization and state minimization of vertex-labelled graphs. A finitary axiomatization for considered algebra is developed and its completeness is proved.

Key Words: graph, analysis, synthesis, determinization, minimization.

*E-mail: pois@suiai.edu.ua
Статтю представив с.н.с., д.ф.-м.н. Буй Д.Б.

Вступ

В останні роки в комп'ютерних науках інтенсивно використовуються не лише графи з поміченими дугами (автомати), але і графи з поміченими вершинами [1]. В теоретичному програмуванні такими графами є блок-схеми програм. У робототехніці графи з поміченими вершинами використовуються для представлення операційного середовища в задачах навігації мобільних роботів: задачі самолокалізації, тобто відрізнення деякої вершини відомого графа від усіх інших його вершин, і задачі контролю карти, тобто відрізнення графа-еталону від заданого класу графів [2]. Подібні графи під назвою „модель Кріпке" використовуються в дослідженнях з надійності програмних систем [3, 4].

У зв'язку з широким використанням цього типу графових моделей, є актуальною задача вивчення їх властивостей, і, зокрема, властивостей мов, що можуть бути в них представлені. В даній роботі мови, що можуть бути представлені в графах з поміченими вершинами, вивчаються шляхом дослідження нової алгебри, подібної до алгебри регулярних мов, але з особливостями (наприклад, у властивостях операції ітерації), які дозволяють, на наш погляд, більш адекватно описувати властивості мов, що можуть бути представлені в графах з поміченими вершинами. Розробка даної алгебри викликана, зокрема, тим, що завдання мов, що можуть бути представлені в графах з поміченими вершинами, у вигляді регулярних виразів алгебри Кліні неадекватно відображає структуру цих мов і викликає труднощі переходу від графів до формул і навпаки.

Робота таку. В першому розділі вводяться основні визначення. В другому розділі розглянуто основні властивості алгебри мов, що можуть бути представлені в графах з поміченими вершинами. Третій розділ присвячено задачам аналізу і синтезу графів з поміченими вершинами. В четвертому розділі розглянуто питання детермінізації та мінімізації графів з поміченими вершинами.

Основні визначення

Скінченним орієнтованим графом з поміченими вершинами назвемо четвірку $G=(Q,E,X,\mu)$, де Q – скінченна множина вершин, $|Q|=n$, $E \subseteq Q\times Q$ – множина дуг, X – скінчений алфавіт поміток вершин, $\mu: Q \to X$ – функція розмітки. Нехай $I \subseteq Q$ – множина початкових, а $F \subseteq Q$ – множина фінальних вершин графа.

Вершини q_1 і q_2 називатимемо суміжними, якщо $(q_1,q_2)\in E$. Шляхом у графі G називатимемо скінченну послідовність суміжних вершин $l=q_1q_2...q_k$, де $(q_i,q_{i+1})\in E$, q_1 – початкова вершина шляху, q_k – заключна вершина. Число $k-1$ називатимемо довжиною шляху. Нехай X^+ – множина всіх непустих слів скінченної довжини в алфавіті X.

Елемент $x=\mu(q_1)\mu(q_2)...\mu(q_k)=x_1x_2...x_k \in X^+$ називатимемо поміткою шляху l в графі G. Для кожної вершини q визначимо шлях нульової довжини, що розпочинається та закінчується в цій вершині. Поміткою нульового шляху вважатимемо $x\in X$, де $\mu(q)=x$.

Множина поміток всіх шляхів, початковою вершиною яких є вершина q_i, а заключна вершина належить до множини фінальних вершин, назвемо мовою, породженою вершиною q_i.

Мовою, породженою графом G, назвемо помітки всіх шляхів в графі G, початкові вершини яких належать до множини I, а заключні – до множини F. Мову, породжену графом G, позначимо $L(G)$.

Якщо в графі G є шляхи $l=q_1q_2...q_k$ та $m=q_kq_{k+1}...q_m$, у яких заключна вершина першого шляху співпадає з початковою вершиною другого шляху, то результатом поєднання таких шляхів буде шлях $q_1q_2...q_kq_{k+1}q_{k+2}...q_m$. До такої операції поєднання шляхів відповідає часткова бінарна операція склеювання слів (поміток шляхів), що визначається на множині X^+ наступним чином: для всіх $w_1,w_2\in X^+$ і всіх $x,y\in X$

$$w_1x \circ yw_2 = \begin{cases} w_1xw_2, & \textit{якщо } x=y; \\ \textit{не визначено}, & \textit{інакше}. \end{cases}$$

Введемо на мовах $L,R\in 2^{X^+}$ операції:

1) об'єднання $L\cup R=\{w \mid w\in L \ \textit{ або } \ w\in R\}$;

2) конкатенація $L\cdot R=\{w_1w_2 \mid w_1\in L \ \ i \ \ w_2\in R\}$;

3) склеювання $L\circ R=\{w_1\circ w_2 \mid w_1\in L \ \ i \ \ w_2\in R\}$;

4) ітерація $L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$, де $L^0 = X$;

$L^{n+1}=L^n\circ L$; $n\ge 0$;

5) позитивна ітерація $L^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i$, де $L^0 = X$;

$L^{n+1}=L^n\circ L$; $n\ge 0$;

6) $L^{\otimes} = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$, де $L^0 = L_{beg}\circ L_{end}$; $L^1 = L$;

$L^{n+1}=L^n\circ L$; $n\ge 1$

$L_{beg}=\{x \mid xw\in L,\ x\in X, w\in X^*\}$

$L_{end}=\{x \mid wx\in L,\ x\in X, w\in X^*\}$.

Розглянемо алгебру $\left\langle 2^{X^+},\circ,\cup,\otimes,\varnothing,X\right\rangle$.

Регулярні вирази в цій алгебрі визначимо індуктивно наступним чином:

1) $\varnothing$ є регулярним виразом, що представляє мову $\varnothing$;

2) x і xy є регулярними виразами та представляють мови $L(x)=\{x\}$ і $L(xy)=\{xy\}$ для всіх $x,y\in X$;

3) Якщо p і q – регулярні вирази, що представлять мови $L(p)$ і $L(q)$ відповідно, то вирази $(p\circ q)$, $(p\cup q)$, $(p^{\otimes})$ також є регулярними, і $L(p\circ q)=L(p)\circ L(q)$, $L(p\cup q)=L(p)\cup L(q)$, $L(p^{\otimes})=(L(p))^{\otimes}$.

Таким чином, регулярними виразами алгебри $\left\langle 2^{X^+},\circ,\cup,\otimes,\varnothing,X\right\rangle$ є всі терми сигнатури $\sigma=(\circ,\cup,\otimes,\varnothing,X)$, що породжені алфавітом $X\cup X^2$, де $X^2=\{xy \mid x\in X,\ y\in X\}$.

Властивості алгебри мов, що можуть бути представлені в графах з поміченими вершинами

Розглянемо основні властивості операцій алгебри $\left\langle 2^{X^+}, \circ, \cup, \otimes, \varnothing, X \right\rangle$.

Операція $\cup$ комутативна і асоціативна, оскільки за визначенням співпадає з теоретико-множинною операцією об'єднання; $R \cup \varnothing = \varnothing \cup R = R$ та $R \cup R = R$ для будь-якого $R \in 2^{X^+}$, тому відносно операції $\cup$ множина 2^{X^+} являє собою комутативний ідемпотентний моноїд, в якому роль нейтрального елементу виконує пуста множина $\varnothing$.

Відносно операції $\circ$ множина 2^{X^+} є моноїд, нейтральним елементом якого є мова X.

Доведемо, що операція $\circ$ асоціативнаа, тобто $P \circ (R \circ Q) = (P \circ R) \circ Q$ для будь-яких мов $P, Q, R \in 2^{X^+}$.

Нехай $w \in P \circ (R \circ Q)$. За визначенням операції $\circ$ слово w має вигляд $w_1 x w_2 y w_3$, де $w_1 \in P$, $w_2 \in R$, $w_3 \in Q$, $x \in X$, $y \in X$. Але це означає, що слово w належить до мови $(P \circ R) \circ Q$.

Таким чином, $P \circ (R \circ Q) \subset (P \circ R) \circ Q$. Аналогічно доводиться $(P \circ R) \circ Q \subset P \circ (R \circ Q)$.

Оскільки $P \circ (R \circ Q) \subset (P \circ R) \circ Q$ і $(P \circ R) \circ Q \subset P \circ (R \circ Q)$ для будь-якого $w \in X^+$, то $P \circ (R \circ Q) = (P \circ R) \circ Q$. За визначенням операції $\circ$ для будь-якого $R \in 2^{X^+}$ виконується $R \circ X = X \circ R = R$, тому алгебра $\left\langle 2^{X^+}, \circ, X \right\rangle$ є моноїдом.

Операціям $\circ$ і $\cup$ задовольняють закони дистрибутивності:

$R \circ (Q \cup P) = R \circ Q \cup R \circ P$;

$(R \cup Q) \circ P = R \circ P \cup Q \circ P$.

Доведемо, що $R \circ (Q \cup P) \subset R \circ Q \cup R \circ P$. Нехай $w \in R \circ (Q \cup P)$. За визначенням $w = w_1 \circ w_2$, де $w_1 \in R$, $w_2 \in Q \cup P$. Якщо $w_2 \in Q \cup P$, то або $w_2 \in Q$, або $w_2 \in P$.

В тому випадку, коли $w_2 \in Q$, з того, що $w = w_1 \circ w_2$ і $w_1 \in R$, $w_2 \in Q$ випливає, що $w \in R \circ Q$.

У випадку коли $w_2 \in P$ з того, що $w = w_1 \circ w_2$ і $w_1 \in R$, $w_2 \in P$ випливає, що $w \in R \circ P$. Тоді $w \in R \circ Q \cup R \circ P$, звідки $R \circ (Q \cup P) \subset R \circ Q \cup R \circ P$.

Аналогічно доводиться, що $R \circ Q \cup R \circ P \subset R \circ (Q \cup P)$.

Наслідком двох включень є $R \circ (Q \cup P) = R \circ Q \cup R \circ P$.

Тотожність $(R \cup Q) \circ P = R \circ P \cup Q \circ P$ доводиться аналогічно.

Із розглянутих властивостей операцій випливає що алгебра $\left\langle 2^{X^+}, \circ, \cup, \varnothing, X \right\rangle$ є ідемпотентне напівкільце. Нехай $\leq$ – відношення природного часткового порядку напівкільця, тобто $P \leq R$ тоді і тільки тоді, коли $P \cup R = R$ для будь-яких $P, R \in 2^{X^+}$.

Замкнутість напівкільця $\left\langle 2^{X^+}, \circ, \cup, \varnothing, X \right\rangle$ випливає із існування об'єднання будь-якої сім'ї множин, що являє собою супремум цієї сім'ї, а також із неперервності операції $\circ$ [5].

Введена алгебра $\left\langle 2^{X^+}, \circ, \cup, \otimes, \varnothing, X \right\rangle$, як і алгебра $\left\langle 2^{X^*}, \cdot, \cup, *, \varnothing, \lambda \right\rangle$ регулярних мов в алфавіті X, являє собою замкнуте ідемпотентне напівкільце з однією додатковою операцією [5]. На відміну від алгебри регулярних мов, введена алгебра не є алгебра Кліні: легко перевірити, що вона не задовольняє її аксіомам [6]. Основні відмінності алгебри $\left\langle 2^{X^+}, \circ, \cup, \otimes, \varnothing, X \right\rangle$ від алгебри $\left\langle 2^{X^*}, \cdot, \cup, *, \varnothing, \lambda \right\rangle$ пов'язані з тим, що, на відміну від конкатенації, операція $\circ$ часткова.

Якщо в алгебрі Кліні $p \cdot q = \varnothing$ тільки тоді, коли $p = \varnothing$ або $q = \varnothing$, то в алгебрі $\left\langle 2^{X^+}, \circ, \cup, \otimes, \varnothing, X \right\rangle$ можна підібрати приклади, коли це не вірно: нехай $L(p) = \{ab\}$, $L(q) = \{cd\}$, тоді $p \circ q = \varnothing$.

Ще одна важлива відмінність полягає в тому, що в алгебрі Кліні множина R^* завжди включає пусте слово та є нескінченною для будь-якого R, а в алгебрі $\left\langle 2^{X^+}, \circ, \cup, \otimes, \varnothing, X \right\rangle$ можна навести приклади множин, для яких результат застосування операції $\otimes$ є нескінченною, скінченною або пустою множиною: якщо $L(p) = \{aba\}$, то $L(p^{\otimes}) = \{a, aba, ababa, ...\}$;

якщо $L(p)=\{ab\}$ то $L(p^{\otimes})=\{ab\}$; якщо $p=\varnothing$, то $p^{\otimes}=\varnothing$.

Оскільки алгебра $\left\langle 2^{X^+},\circ,\cup,*,\varnothing,X\right\rangle$ не являє собою алгебру Кліні, виникла необхідність створити нові еквівалентні співвідношення для цієї алгебри, що розкривають властивості її операцій. В результаті отримана скінченна система аксіом (1), що складається з тотожностей і квазітотожностей, яка є суттєво відмінною від аксіоматики алгебр Кліні.

$$\begin{gathered}
p\cup q=q\cup p\\
p\cup\varnothing=p\\
p\cup p=p\\
p\circ(q\circ r)=(p\circ q)\circ r\\
X\circ p=p\\
p\circ X=p\\
p\circ(q\cup r)=p\circ q\cup p\circ r\\
(p\cup q)\circ r=p\circ r\cup q\circ r\\
\varnothing\circ p=\varnothing\\
p\circ\varnothing=\varnothing\\
p^{\otimes}\cup X\geq p^{\otimes}\circ p\cup p\cup X\\
p^{\otimes}\cup X\geq p\circ p^{\otimes}\cup p\cup X\\
q\cup p\circ y\leq y\Rightarrow p^{\otimes}\circ q\cup q\leq y\\
q\cup y\circ p\leq y\Rightarrow q\circ p^{\otimes}\cup q\leq y\\
p\leq X\Rightarrow p\circ p=p
\end{gathered}\tag{1}$$

Система аксіом (1) повна для алгебри $\left\langle 2^{X^+},\circ,\cup,*,\varnothing,X\right\rangle$, а саме: два регулярних вирази p і q над скінченним алфавітом X позначають одну і ту саму мову, що можу бути представлена в графі, тоді і тільки тоді, коли формула $p=q$ є логічним наслідком аксіом (1).

Для доведення того, що у випадку, коли із аксіом логічно випливає, що $p=q$, для регулярних виразів p і q виконується $L(p)=L(q)$, достатньо показати, що всі аксіоми мають таку властивість, що мови, які представляють регулярні вирази у лівих частинах тотожностей, співпадають із мовами їх правих частин.

Для доведення того, що в тому випадку, коли $L(p)=L(q)$, формула $p=q$ являє собою наслідок аксіом (1), можна показати, що для будь-якого терму p вільної алгебри багатовиду, що описується тотожностями і квазітотожностями (1), можливо знайти відповідну систему рівнянь таким чином, що лінійна комбінація рішень цієї системи дає регулярний вираз p', який представляє ту саму мову, що і початковий терм, причому із аксіом (1) випливає, що $p=p'$. Шляхом введення порядку на множині всіх слів X^+ можливо добитися того, що для всіх регулярних виразів, що представляють одну і ту саму мову, відповідні коефіцієнти системи рівнянь будуть однакові. Тоді можливо показати, що для будь-яких регулярних виразів p і q, що представляють одну мову, із (1) випливає рівність регулярних виразів, що відповідають рішенням систем для p і q, тобто $p'=q'$, звідки випливає, що $p=q$ також є наслідком (1).

Задачі аналізу і синтезу для графів з поміченими вершинами

Найважливішими задачами, пов'язаними з дослідженням графів з поміченими вершинами, є задача аналізу графа, тобто знаходження регулярного виразу, що представляє мову, породжену цим графом, і задача синтезу, тобто побудова графа, що породжує мову, яка може бути представлена даним регулярним виразом [5].

Рішення цих задач базується на наступній теоремі, що в певному сенсі аналогічна відомій теоремі Кліні, яка стверджує, що клас мов, що розпізнаються скінченними автоматами, співпадає з класом мов, які можна представити регулярними виразами алгебри регулярних мов $\left\langle 2^{X^*},\cdot,\cup,*,\varnothing,\lambda\right\rangle$.

Теорема 1. *Для будь-якої мови* $L\subseteq X^+$ *еквівалентні твердження:*

1) L – мова, що може бути представлена регулярним виразом алгебри $\left\langle 2^{X^+},\circ,\cup,*,\varnothing,X\right\rangle$;

2) L – мова, що може бути представлена графом з поміченими вершинами.

Розв'язання задачі аналізу для графів з поміченими вершинами грунтується на тому, що мова, яка може бути представлена графом з поміченими вершинами, також може бути представлена системою лінійних рівнянь. Для таких систем запропоновано метод розв'язання, який базується на використанні відомої теореми про нерухому точку для замкнутих на півкілець

[1]. В результаті застосування цього методу для будь-якого графа G можна отримати регулярний вираз, для якого $L(R) = L(G)$.

Для рішення задачі синтезу виявилося необхідним ввести алгебру матриць над елементами розглянутої алгебри і матричне зображення графів з поміченими вершинами, яке суттєво відрізняється від матричного зображення скінченних автоматів, що розглядається в роботах [6, 7].

Твердження. *Клас мов, що можуть бути представлені регулярними виразами алгебри* $\left\langle 2^{X^+}, \circ, \cup, *, \varnothing, X \right\rangle$, *співпадає з класом всіх регулярних мов, що не містять в собі пустого слова.*

Дане твердження витікає з того, що в роботі [1] було показано, що будь-яка мова, що може бути представлена графом з поміченими вершинами, може бути представлена регулярним виразом алгебри $\left\langle 2^{X^*}, \cdot, \cup, *, \varnothing, \lambda \right\rangle$, а з теореми 1 випливає, що мова може бути представлена графом з поміченими вершинами тоді і тільки тоді, коли вона може бути представлена регулярним виразом алгебри $\left\langle 2^{X^+}, \circ, \cup, \otimes, \varnothing, X \right\rangle$.

Детермінізація і мінімізація графів з поміченими вершинами

Граф $G = (Q, E, X, \mu)$ назвемо детермінованим, якщо для будь-якої пари $(q_i, x_i) \in Q \times X$ знайдеться не більше однієї вершини $q_j \in Q$, для якої справедливо, що $(q_i, q_j) \in E$ і $\mu(q_j) = x_i$. Якщо для будь-якої пари $(q_i, x_i) \in Q \times X$ в графі G знайдеться не менше однієї вершини $q_j \in Q$, для якої справедливо, що $(q_i, q_j) \in E$ і $\mu(q_j) = x_i$, то граф G назвемо повним.

Теорема 2. *Для будь-якого недетермінованого графа G, що породжує мову $L(G)$, існує такий повний детермінований граф G', що $L(G) = L(G')$.*

Доведення теореми 2 базується на методі, подібному до конструкції підмножин для скінченних автоматів [6].

Слід зазначити, що є суттєва різниця між детермінованими графами з поміченими вершинами і детермінованими скінченними автоматами.

У повного детермінованого автомата є лише один початковий стан і лише один «пустий» стан. У повного детермінованого графа з поміченими вершинами початкових і «пустих вершин» стільки, скільки символів в алфавіті X.

Відрізняються і оцінки кількості вершин після детермінізації. Якщо у вихідного не детермінованого автомата кількість станів дорівнювала n, то після застосування алгоритму конструкції підмножин для його детермінізції у отриманого автомата у найгіршому випадку буде 2^n станів.

При застосуванні алгоритму детермінізації графів з поміченими вершинами, кількість вершин повного детермінованого графа, отриманого в результаті, в найгіршому випадку буде дорівнювати $|Q'| = \sum 2^{|Q_i|}$, де через Q_i позначена множина всіх вершин вихідного не детермінованого графа G з поміткою x_i.

В той же час і у повних детермінованих графів, і у повних детермінованих автоматів є важлива спільна властивість, на наявності якої ґрунтуються подальші міркування: для будь-якого слова з X^+ в них завжди є єдиний шлях, що веде із початкової вершини, помітка якого співпадає з цим словом.

Визначимо похідну мови $L \subseteq X^+$, що може бути представлена графом з поміченими вершинами, по слову $w \in X^+$ як $D_w L = \{y | w \circ y \in L\}$.

Для мови $L \subseteq X^+$ визначимо відношення $\rho_L \subseteq X^+ \times X^+$ наступним чином: для всіх $u, v \in X^+$ $u\ \rho_L\ v$ тоді і тільки тоді, коли $D_u L = D_v L$, і слова u та v закінчуються одним і тим самим символом $x \in X$. Легко перевірити, що це відношення є рефлексивним, симетричним, транзитивним та право-інваріантним.

Теорема 3. *Мова $L \subseteq X^+$ може бути представлена графом з поміченими вершинами тоді і тільки тоді, коли відношення ρ_L поділяє X^+ на скінченне число класів еквівалентності.*

Дана теорема дає необхідну і достатню умову того, що мова може бути представлена в графі з поміченими вершинами (аналогічно теоремі Майхілла-Нерода, яка дає необхідну і достатню умову того, що мова регулярна, тобто розпізнається скінченним автоматом). Наслідком цієї теореми є існування канонічних форм для графів з поміченими вершинами та регулярних виразів, що представляють мови таких графів:

будь-якій мові, що може бути представлена в графі з поміченими вершинами, відповідає єдиний з точністю до ізоморфізму повний детермінований граф з мінімальною кількістю вершин та єдина система ліво-лінійних рівнянь, із рішень якої може бути отриманий регулярний вираз, що представляє дану мову.

Для графів з поміченими вершинами запропоновано алгоритми для вирішення наступних задач: побудови для графа G детермінованого графа, що породжує мову $L(G)$; побудови для будь-якого детермінованого графу з поміченими вершинами графа G повного детермінованого графу з поміченими вершинами, що породжує мову, $L(G)$ з мінімальним числом вершин.

Таким чином, для алгебри мов, що можуть бути представлені в графах з поміченими вершинами, отримані аналоги всіх основних результатів, відомих для алгебри регулярних мов і скінченних автоматів. Це дає змогу використовувати введену алгебру $\left\langle 2^{X^+}, \circ, \cup, \otimes, \varnothing, X \right\rangle$ під час аналізу графів з поміченими вершинами так, як алгебра регулярних мов використовується для скінченних автоматів.

Висновки

В даній роботі досліджені основні властивості алгебри мов, що можуть бути представлені в графах з поміченими вершинами: знайдені алгебраїчна і лінгвістична характеризації мов, що можуть бути представлені регулярними виразами цієї алгебри, розроблені методи аналізу і синтезу розглядуваних мов та способи детермінізації і мінімізації графів з поміченими вершинами.

Список використаних джерел

1. *Капитонова Ю.В.* . Математическая теория проектирования вычислительных систем / Ю.В. Капитонова, А.А. Летичевский. – Москва: Наука, 1988. – 296 с.
2. *Dudek G.* Map validation and robot self-location in a graph-like world / G. Dudek, M. Jenkin, E. Milios, D. Wilkes// Robotics and autonomous systems. – 1997. – Vol. 22(2). – P. 159-178.
3. *Baier C.* Principles of Model Checking / C. Baier, J.-P. Katoen. – Cambridge: MIT Press, 2008. – 975 p.
4. Clarke E. M. Model Checking / E. M. Clarke, O. Grumberg, D. Peled – Cambridge: MIT Press, 1999. – 257 p.
5. Белоусов А.И. Дискретная математика / А.И. Белоусов, С.Б. Ткачев. – Москва: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 744 с.
6. Conway J.H. Regular Algebra and Finite Machines / J.H. Conway – London: Chapman and Hall, 1971. – 147 p.
7. *Грунский И.С.* Об алгебре языков, представимых графами с отмеченными вершинами / И.С. Грунский, Е.А. Пряничникова // Труды Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. - 2009. – т.18. – С. 37-46.
8. *Yu.S.* Regular Languages / S. Yu // Handbook of Formal Languages. – Berlin: Springer, 1997. – P. 41-110

Надійшла до редколегії 15.12.10