Министерство образования и науки Украины
Национальная академия наук Украины
Министерство образования и науки Российской Федерации
Национальный технический университет Украины "КПИ"
Донецкий национальный технический университет
Институт прикладной математики и механики НАН Украины
Институт прикладного системного анализа
НИТУ "Московский Институт Стали и Сплавов"

Моделирование, идентификация, синтез систем управления

Modeling, identification and control systems design

Сборник тезисов
Четырнадцатой Международной
научно-технической конференции
11 – 18 сентября 2011 г.

Москва – Донецк
2011

СОДЕРЖАНИЕ (CONTENTS)

ВОПРОСЫ СИНТЕЗА СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

СОДЕРЖАНИЕ (CONTENTS)

УДК 519.6

Е.А. Пряничникова

АЛГЕБРЫ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С ОТМЕЧЕННЫМИ ГРАФАМИ

Государственный университет информатики и искусственного интеллекта, Донецк, Pryanichnikovae@gmail.com

В теории конечных автоматов одним из важнейших результатов является теорема Клини, в которой утверждается, что класс языков, распознаваемых конечными автоматами, совпадает с классом рациональных языков, представимых регулярными выражениями алгебры Клини [1].

В данной работе вводятся и исследуются полностью отмеченные графы – ориентированные графы, в которых дуги и вершины отмечены элементами двух произвольных множеств. Для таких графов доказана теорема, аналогичная теореме Клини.

Рассмотрена взаимосвязь особенностей размеченных графов и свойств алгебр, термы которых можно использовать для описания поведения графов.

Показано, что для заданного типа графов алгебра, обладающая требуемыми свойствами, не обязательно единственная, и может не быть полукольцом. Для частных случае раз меченных графов предложен способ построения алгебры, обладающей требуемыми свойствами.

Пусть X и Y - два произвольных множества. Размеченным ориентированным графом назовем пятерку $G=(G,I,F,\alpha,\beta)$, где $G=(V,E,\rho_1,\rho_2)$ - ориентированный граф, в котором допускаются кратные дуги и петли, с конечным множеством вершин $V=\{v_1,v_2,...,v_n\}$, множеством дуг $E=\{e_1,e_2,...,e_m\}$, инциденторами $\rho_1:E\to Q$, ставящим в соответствие каждой дуге вершину, называемую началом этой дуги, и $\rho_2:E\to Q$, ставящим в соответствие каждой дуге вершину, называемую концом этой дуги; $I\subseteq V$ - множество начальных вершин; $F\subseteq V$ - множество конечных вершин; $\alpha:V\to X$ - функция разметки вершин; $\beta:E\to Y$ - функция разметки дуг.

В качестве частных случаев полностью размеченных графов можно рассматривать конечные автоматы, графы с отмеченными вершинами, взвешенные графы над полукольцом, графы, дуги которых размечены натуральными числами, поведение которых - длина кратчайшего пути, ведущего в этом графе из начального состояния в конечное.

Для характеризации поведения полностью размеченных графов введем алгебру $Z = (Z,+,\cdot,*,o)$ с двумя бинарными, одной унарной и одной нульарной операциями, обладающую следующими свойствами:

1) $(Z,+,o)$ - коммутативный идемпотентный моноид, $(Z,\cdot)$ - полугруппа, операция $\bullet$ дистрибутивна относительно $+$, o служит аннулятором.

2) Любая последовательность элементов множества Z имеет точную верхнюю грань относительно отношения порядка $\le$, определенного следующим образом: $a \le b$ тогда и только тогда, когда $a + b = b$ для любых $a, b \in Z$.

3) Точной верхней гранью произвольной последовательности $\{x_n\}_{n\in N}$ является бесконечная сумма $\sum x_n$. Для бесконечной суммы справедливы аналоги свойств идемпотентности, ассоциативности, коммутативности, операция $\bullet$ дистрибутивна не только относительно конечных, но и относительно бесконечных сумм.

4) Для любого $a \in Z$ a^* определяется как точная верхняя грань последовательности всех степеней элемента a, то есть $a^* = \sum_{n=1}^{\infty} a^n$, где по определению, $a^1 = a$, $a^{n+1} = a^n \cdot a$, $n = 1,2,\ldots$

Частным случаем введенной алгебры является идемпотентное полукольцо.

Для алгебры $Z = (Z,+,\cdot,*,o)$ введено понятие регулярных выражений и доказан аналог теоремы Клини: определяются условия, при выполнении которых элемент множества Z является поведением полностью размеченного графа тогда и только тогда, когда он может быть представлен регулярным выражением. Доказательство теоремы основано на известной теореме о неподвижной точке[2]. Показано, что алгебра, обладающая требуемыми свойствами, не обязательно единственная.

1. Anderson J. Automata Theory with Modern Applications. – Cambridge: Cambridge University Press, 2006. – 255 с.
2. Капитонова Ю. В., Летичевский А. А. Математическая теория проектирования вычислительных систем. – М.: Наука, 1988. – 296с.