УДК 517.988

Член.-корр. НАН Украины А.И. Шевченко, А.С. Миненко

Задача Стефана при наличии конвекции

Исследуется задача Стефана с учетом конвекции и примесей в жидкой фазе. Доказана теорема существования. Построено приближенное решение задачи с использованием метода малого параметра. Получена сходимость приближенного решения к точному решению в метрике $H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}$.

Досліджується задача Стефана з урахуванням конвекції і домішок в рідині. Доведена теорема розв'язності. Використовуючи метод малого параметру побудовано наближене рішення задачі. Доведена збіжність наближеного рішення до точного розв'язку в метриці $H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}$.

The Stefan problem with convection

The convection Stefan problem in liquid phase is investigated. We prove the theorem on the solvability. The approximate problem solution is constructed using the method of small parameter. The convergence of approximate solution to the exact solution in metrics $H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}$ is proved.

1. Изучается задача, моделирующая процесс кристаллизации вещества, с учетом конвективного переноса тепла. При этом задача содержит две свободные границы. Впервые при исследовании данного класса задач используется метод малого параметра. В работе построено приближенное решение задачи и исследована его сходимость.

Будем обозначать через $\Omega^{\pm}_t$ область, занятую жидкой (твердой) фазой в момент времени *t*. При этом Ω_0 – заданная область в R^3, граница которой состоит из двух замкнутых связанных поверхностей Γ_0^+ и Γ_0^-, не имеющих самопересечений, где Γ_0 – гладкая замкнутая поверхность, лежащая внутри Ω_0, такая, что Γ_0^- лежит внутри ограниченной области, границей которой является Γ_0. Требуется определить области Ω^+_t и Ω^-_t (т.е. границы Γ_t^+ и Γ_t^-), вектор скорости $\vec{V}(x,t)=(\vec{V}_1(x,t),\vec{V}_2(x,t),\vec{V}_3(x,t))$, давление $p(x,t)$, концентрации примеси $c(x,t)$, температуру жидкой $u^+(x,t)$ и твердой $u^-(x,t)$ фаз по следующим условиям:

$$\frac{\partial u^+(x,t)}{\partial t}+(\vec{V}\nabla)u^+(x,t)-a^2{}_+\nabla^2u^+(x,t)=0,\ (x,t)\in D_T{}^+,$$

$$\frac{\partial u^-(x,t)}{\partial t}-a^2{}_-\nabla^2u^-(x,t)=0,\ (x,t)\in D_T{}^-,$$

$$\frac{\partial\vec{V}(x,t)}{\partial t}+(\vec{V}\nabla)\vec{V}(x,t)+\nabla p(x,t)=v\nabla^2\vec{V}(x,t)+\vec{f}(u^+,c),\ (x,t)\in D_T{}^+,$$

$$\nabla\vec{V}(x,t)=0,\ (x,t)\in D_T{}^+,\ \nabla\vec{V}(x,0)=\vec{C}(x);$$

$$T(\vec{V},p)\vec{n}=-q(x,t)\vec{n},\ (x,t)\in\Gamma_t{}^+;V_n=-(1-\frac{\rho^-}{\rho^+})W_n; \tag{1}$$

$$V_\tau=0,\ (x,t)\in\Gamma_t,\ u^{\pm}(x,t)=B^{\pm}(x,t),\ (x,t)\in\Gamma_t{}^+\cup\Gamma_0{}^-;$$

$$u^{\pm}(x,0)=A^{\pm}(x);u^+=u^-=T^*-\varepsilon c,\ k_-\frac{\partial u^-}{\partial n}-k_+\frac{\partial u^+}{\partial n}=\chi p^+W_n,\ (x,t)\in\Gamma_t,$$

$$\frac{\partial c}{\partial t}(x,t)+(\vec{V}\nabla)c(x,t)-\gamma\nabla^2c(x,t)=0,\ (x,t)\in D_T{}^+;$$

$$c(x,0)=g_0(x),\ c(x,t)=g(x,t),\ (x,t)\in\Gamma_t{}^+,\ -\alpha\frac{\partial c}{\partial n}=\beta cW_n,\ (x,t)\in\Gamma_t.$$

Здесь $x=(x_1,x_2,x_3)$, $D_T{}^{\pm}=\{(x,t):x\in\Omega^{\pm}{}_t,t(0,T)\}$, $\Omega^{\pm}{}_t$ – области соответственно жидкой и твердой фаз, $\partial\Omega^+=\Gamma_t\cup\Gamma_t{}^+$, $\partial\Omega^-=\Gamma_0{}^-\cup\Gamma_t$, $\vec{n}$ – нормаль к Γ_t, направленная в сторону Ω_t^+. Далее, $\nabla=(\partial/\partial x_1,\partial/\partial x_2,\partial/\partial x_3)$, $T(\vec{V},p)$ – тензор напряжений с элементами $T_{ij}=-\delta_{ij}p+v(\partial V_i/\partial x_j+\partial V_j/\partial x_i)$, V_n и V_τ – нормальная и тангенциальная составляющие $\vec{V}$, W_n – скорость движения фронта кристаллизации в направлении нормали $\vec{n}$; $T^*,v,\varepsilon,\chi,\rho^+,\rho^-,\alpha,\beta,\gamma,k_+,k_-$ – известные положительные постоянные. Отметим также, что если $\Phi(x,t)=u^{\pm}(x,t)+\varepsilon c(x,t)-T^*=0$ – уравнение поверхности Γ_t, тогда $W_n=-\Phi_t\,|\nabla\Phi|$. В дальнейшем удобно условие Стефана представить в следующем виде: $L(u^+,u^-,\Gamma_t,\varepsilon)=k_-^2\,|\nabla u^-|^2-k_+^2\,|\nabla u^+|^2+\varepsilon(k_-^2+k_-k_+)(\nabla u^-,\nabla c)-\varepsilon(k_-^2+k_-k_+)(\nabla u^+,\nabla c)+$ $+\chi\rho^+(k_-u^-{}_t+k_+u_t^+)+\chi\rho^+\varepsilon(k_++k_-)c_t=0$, $(x,t)\in\Gamma_t$.

В работе предполагается, что $A(x)\in H^{4+\alpha}(\overline{\Omega_0^{+}})$, $\vec{C}(x)\in H^{2+\alpha}(\Omega_0^{+})$, $B^{\pm}(x,t)\in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_t^{+}\cup\Gamma_0^{-}\times[0,T])$, $\vec{f}(u^{+},c)\in C^{1}(R^{2})$, $g(x,t)\in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_t^{+}\times[0,T])$, $g_0(x)\in H^{4+\alpha}(\overline{\Omega_0^{+}})$. При этом $g(x,t)$ и $g_{x_i}(x,t)$должны быть функциями класса $H^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(R^{3}\times[0,T])$. Считается также, что выполнены условия согласования до первого порядка включительно, которые формулируются аналогично [1, с. 268, с.363].

2. Будем искать свободные границы Γ_t и Γ_t^{+} в следующем виде $\Gamma_t=\{x=x(\omega)+\vec{n}(\omega)\rho(\omega,t)\}$, $\Gamma_t^{+}=\{x=x(\theta)+\eta(\theta,t)\vec{n}(\theta)\}$, где $\omega=(\omega_1,\omega_2),\ \theta=(\theta_1,\theta_2)$, $x(\omega)\in\Gamma_0$, $x(\theta)\in\Gamma_0^{+}$, $\rho(\omega,t)$ и $\eta(\theta,t)$ некоторые функции соответственно классов $H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_0\times[0,T])$ и $H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_0^{+}\times[0,T])$, $\rho(\omega,0)=0$ и $\eta(\theta,0)=0$. Введем также обозначения $Q_T^{\pm}=\Omega_0\times[0,T]$, $\Gamma_{0T}^{-}=\Gamma_0^{-}\times[0,T]$, $\Gamma_{0T}^{+}=\Gamma_0^{+}\times[0,T]$, $\Gamma_{0T}=\Gamma_0\times[0,T]$.

Далее, для достаточно малых чисел ε будем искать решение задачи (1) в виде следующих разложений:

$$u^{\pm}(x,t;\varepsilon)=u_0^{\pm}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^{k}u_k^{+}(x,t),\ p(x,t;\varepsilon)=p_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^{k}p_k(x,t),$$

$$V_i(x,t;\varepsilon)=V_{i0}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^{k}V_{ik}(x,t),\ c(x,t)=c_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^{k}c_k(x,t),\qquad (2)$$

$$i=1,2,3;\ \rho(\omega,t;\varepsilon)=\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^{k}\rho_k(\omega,t),\ \eta(\theta,t;\varepsilon)=\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^{k}\eta_k(\theta,t).$$

В работах [2-7] изучены нулевые и первые приближения задачи (1) для малых чисел ε. При этом установлено, что $u_0^{\pm}(x)=A^{\pm}(x)$, $\vec{V}_0(x)=\vec{C}(x)$, $c_0(x)=g_0(x)$, $\rho_1(\omega,t)\in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_{0T})$, $\eta_1(\theta,t)\in\Gamma_{0T}^{+}$, $u_1(x,t;\rho,\eta)\in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\overline{Q_T^{\pm}})$, $c_1(x,t;\rho,\eta)\in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\overline{Q_T^{\pm}})$ причем $\rho_1(\omega,t)$ находим как неподвижную точку сжимающегося оператора M_1: $M_1\rho_1=\dfrac{1}{\chi p^{+}}\displaystyle\int_0^t(k_-\frac{\partial u_1^{-}}{\partial n}-k_+\frac{\partial u_1^{+}}{\partial n}+f_1(x,t))dt$, $x(\omega)\in\Gamma_{0T}$.

3. Имеют место следующие формулы:

$$u_x\big|_{\Gamma_t}=u_{0x}+\varepsilon(\alpha_1f_1+\beta_1u_1+\frac{\partial u_1}{\partial x})+\varepsilon^2(\alpha_2f_2+\beta_2u_2+\frac{\partial u_2}{\partial x})+...+\varepsilon^k(\alpha_kf_k+\beta_ku_k+\frac{\partial u_k}{\partial x})+o(\varepsilon^k),$$

$(x,t)\in\Gamma_{0T}$; $W_n\big|_{\Gamma_t}=-(\dfrac{u_{1t}}{|\nabla u_0|}+F_1)\varepsilon-(\dfrac{u_{2t}}{|\nabla u_0|}+F_2)\varepsilon^2-...-(\dfrac{u_{kt}}{|\nabla u_0|}+F_k)+o(\varepsilon^k)=0$, $(x,t)\in\Gamma_{0T}$,

$$L(u^{+},u^{-},\Gamma_t,\Gamma_t^{+},\varepsilon)|_{\Gamma_t}=[k_-^2|\nabla u_0^{-}|^2-k_+^2|\nabla u_0^{+}|^2]+\varepsilon[2k_-^2(\nabla u_0^{-},\nabla u_1^{-})-2k_+^2(\nabla u_0^{+},\nabla u_1^{+})+\Phi_1+$$
$$+\chi\rho^{+}(k_-u_{1t}^{-}+k_+u_{1t}^{+})]+...+\varepsilon^k[2k_-^2(\nabla u_0,^{-}\nabla u^{-}{}_k)-2k_+^2(\nabla u_0^{+},\nabla u^{+}{}_k)+\Phi_k+\chi\rho^{+}(k_-u_{kt}^{-}+k_+u_{kt}^{+})]+$$

$+o(\varepsilon^k)=0$, $(x,t)\in\Gamma_{0T}$, где $\alpha_k(x,t),\ \beta_k(x,t),\ f_k(x,t),\ F_k(x,t)$ и $\Phi_k(x,t)$ – известные функции. Из последней формулы следует, что $k_-^2|\nabla u_0^{-}|^2-k_+^2|\nabla u_0^{+}|=0$, $x\in\Gamma_0$, $k_-\dfrac{\partial u_k^{-}}{\partial n}-k_+\dfrac{\partial u_k^{+}}{\partial n}+\Phi_k=\chi\rho^{+}\dfrac{\partial\rho_k}{\partial t}$, $(x,t)\in\Gamma_{0T}$.

4. Введем следующие обозначения: $M_1(\overrightarrow{\xi_i},\overrightarrow{\zeta_j})=(\overrightarrow{\xi_0}\nabla)\overrightarrow{\zeta_k}+(\overrightarrow{\xi_1}\nabla)\overrightarrow{\zeta_{k-1}}+...+(\overrightarrow{\xi_k}\nabla)\overrightarrow{\zeta_0}$, $M_2(\overrightarrow{\xi_i},\zeta_j)=(\overrightarrow{\xi_0}\nabla)\zeta_k+(\overrightarrow{\xi_1}\nabla)\zeta_{k-1}+...+(\overrightarrow{\xi_k}\nabla)\zeta_0$, $N(\overrightarrow{V_i},p_j)\vec{n}=T(\overrightarrow{V_0},p_k)\vec{n}+T(\overrightarrow{V_1}p_{k-1})\vec{n}+...+T(\overrightarrow{V_k},p_0)\vec{n}$.

Затем рассмотрим *k*-ое приближение $(\overrightarrow{V_k},u_k{}^{\pm},p_k,\rho_k,\eta_k,c_k)$ задачи (1) для малых чисел ε. Имеем:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\overrightarrow{V_k}}{\partial t}+M_1(\overrightarrow{V_i},\overrightarrow{V_j})+\nabla p_k=\nu\nabla^2\overrightarrow{V_k}+\dfrac{1}{k!}d^2f(u_k{}^+,c_k),\ (x,t)\in Q_T{}^+\\ \nabla\overrightarrow{V_k}=0,\ (x,t)Q_T{}^+;\ N(\overrightarrow{V_i},p_j)\vec{n}=0,\ (x,t)\in\Gamma_{0T}{}^+,\\ \overrightarrow{V_k}(x,0)=0,\ V_{kn}=(1-\dfrac{p^-}{\rho^+})[\dfrac{u_{kt}{}^+}{|\nabla u_0{}^+|}+F_k(x,t)],\ V_{k\tau}=0,\ (x,t)\in\Gamma_{0,T}\end{cases}\tag{3}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_k{}^+}{\partial t}+M_2(\overrightarrow{V_i},u_k{}^+)=a^2{}_+\nabla^2u_k{}^+,\ (x,t)\in Q_T{}^+,\\ \dfrac{\partial u_k{}^-}{\partial t}-a^2{}_-\nabla^2u_k{}^-=0,\ (x,t)\in Q_T{}^-,\\ u^{\pm}{}_k(x,0)=0,\ u^{\pm}{}_k(x,t)=0,\ (x,t)\in\Gamma_{0T}{}^-\cup\Gamma_{0T}{}^+,\ u_k{}^+=u_k{}^-,\\ |\nabla u_0{}^{\pm}(x(\omega))|\rho_k(\omega,t)+u_k(x(\omega),t)+f_k(x(\omega),t)=0,\ (x,t)\in\Gamma_{0T}\end{cases}\tag{4}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial c_k}{\partial t}+M_2(\overrightarrow{V_i},c_j)-\gamma\nabla^2c_k=0,\ (x,t)\in Q_T{}^+,c(x,0)=0,\ c_k(x,t)=0,\\ (x,t)\in\Gamma_{0T}{}^+;-\alpha\dfrac{\partial c_k}{\partial n}-\beta_kc_k=c_0(x)\dfrac{u_{kt}{}^+}{|\nabla u_0{}^+|}+F_k,(x,t)\in\Gamma_{0T},\\ \dfrac{\partial c_0}{\partial n}\eta_k(\theta,t)+c_k(x(\theta),t)+g_k(x(\theta),t)=0,\ (x,t)\in\Gamma_{0T}{}^+,\end{cases}\tag{5}$$

здесь $F_k(x,t)$, $f_{k(x,t)}$ и $F_k^*(x,t)-$ известные функции.

Зададим теперь $\vec{V}=\vec{V}_1(x,t)$. Затем решим задачу (4), (5) и найдем $u_1^{\pm},c_1,\rho_1,\eta_1$. После чего решим задачу (3), являющуюся начально-краевой задачей для системы Навье-Стокса. Затем, используя новое значение $\overrightarrow{V_2}(x,t)$, снова решаем задачу (4) и (5) и т.д. Следовательно, получим процесс последовательных приближений $\overrightarrow{V_k},u_k^{\pm},c_k,\rho_k,\eta_k$. Доказательство сходимости этого процесса аналогично приведенному в [8] причем при заданном $\rho_k(\omega,t)\in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_{0T})$ найдем функции $u_k{}^{\pm}(x,t,\rho_k)\in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\overrightarrow{Q_T^{\pm}})$, $c_k(x,t,\rho_k)\in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\overrightarrow{Q_T^{\pm}})$ как единственное решение задачи (4)-(5), а $\rho_k(\omega,t)$ находим как неподвижную точку сжимающегося оператора M_k:

$$M_k\rho_k=\frac{1}{\chi\rho^+}\int_0^t(k_-\frac{\partial u_k{}^-}{\partial n}-k_+\frac{\partial u_k{}^+}{\partial n}+f_k(x,t))dt,\ (x(\omega),t)\in\Gamma_{0T}.$$

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. Пусть выполнены условия $|\nabla A^+(x(\omega))|=\dfrac{\partial g_0}{\partial n}$, $x\in\Gamma_0$; $\dfrac{c(k_-+k_+)}{\chi\rho^+}<1$**,** где c – некоторая постоянная [1, с. 364] и пусть $\nabla^2A^+(x)=0$**,** $x\in\Omega_0^{\pm}$**,**

$A^{\pm}(x)|_{x\in\Gamma_0^+\cup\Gamma_0^-} = B^{\pm}(x,0)$, $A^{\pm}(x)|_{\Gamma_0} = 0$, $\vec{C}(x) = 0$, $x \in \overline{\Omega_0}^{\pm}$, $k_- |\nabla A^-(x)|_{\Gamma_0} = k_+ |\nabla A^+(x)|_{\Gamma_0}$, $|\nabla A^{\pm}(x)||_{\Gamma_0} \geq \varepsilon > 0$ (здесь ε некоторая положительная постоянная). Тогда оператор M_k, действующий из $H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_{0T})$ в $H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_{0T})$, имеет там неподвижную точку.

Лемма 2. В качестве k-го приближения задачи (1) можно взять решение $u_k^{\pm}(x,t)$, $c_k(x,t)$, $\vec{V_k}(x,t)$, $\rho_k(\omega,t)$, $\eta_k(\theta,t)$ задачи (4)-(5).

Теорема. Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда приближения $V_k(x,t)$, $u_k^{\pm}(x,t)$, $c_k(x,t)$, $\rho_k(\omega,t)$, $\eta_k(\theta,t)$ сходятся к функциям $V(x,t)$, $u^{\pm}(x,t)$, $c(x,t)$, $\rho(\omega,t)$, $\eta_k(\theta,t)$ – класса $H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}$, являющимся решением задачи (1).

Лемма 3. Пусть $\frac{\partial g_0(x)}{\partial n} \neq 0$ на Γ_0^+. Тогда при малых числах ε и достаточно малых значениях t справедливы формулы:

$$\Gamma_t^+ : x = x(0) - \vec{n}\sum_{i=1}^{k} \varepsilon^i \frac{c_i(x(\theta),t) + g_i(x(\theta),t)}{\frac{\partial c_0}{\partial n}} + o(\varepsilon^k),\ x \in \Gamma_0^+,$$

$$\Gamma_t : x = x(\omega) - \vec{n}\sum_{i=1}^{k} \varepsilon^i \frac{u_i(x(\omega),t) + f_i(x(\omega),t)}{|\nabla u_0^{\pm}(x(\omega))|} + o(\varepsilon^k),\ x \in \Gamma_0.$$

Замечание. Доказанная теорема фактически устанавливает существование решения задачи (1) в классе функций $H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}$.

Литература

1. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 756 С.

2. Миненко А.С. Вариационные задачи со свободной границей. – К.: Наукова думка, 2005. – 341 С.

3. Шевченко А.И., Миненко А.С. Приближенный анализ многомерной конвективной задачи Стефана // Доповіді НАН України. – 2010. – №4. – С. 30-34.

4. Шевченко А.И., Миненко А.С. Приближенный анализ стационарной конвективной задачи Стефана // Доповіді НАН України. – 2010. – №5. – С. 36-40.

5. Шевченко А.И., Миненко А.С. Приближенный анализ пространственной конвективной задачи Стефана // Доповіді НАН України. – 2010. – №10. – С. 29-33.

6. Миненко А.С. Исследование одной конвективной задачи Стефана методом Ритца // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, №11. – С. 1546-1556.

7. Миненко А.С. О минимизации одного интегрального функционала методом Ритца // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, №10. – С. 1385-1394.

8. Солонников В.А. Разрешимость задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости, ограниченной свободной поверхностью // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1977. – **41**, №6. – С. 1388-1424.

Государственный университет
информатики и искусственного
интеллекта,
83050 г. Донецк, пр. Б.Хмельницкого, 84
Тел. (062) 304 – 92 – 58
Факс (062) 337 – 78 – 66
E-mail: minenko@iai.donetsk.ua

Поступило в редакцию