УДК 519.246.8

ГРАНИЦЫ ПРИМЕНИМОСТИ КРИТЕРИЯ КЕЛЛИ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ КАПИТАЛОМ В СЛУЧАЕ УСЕЧЕННОГО НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДОХОДНОСТИ ТОРГОВОЙ СИСТЕМЫ

Гурьянова Т.В.
Донецкий национальный технический университет
кафедра прикладной математики и информатики
gurianova_taya@ukr.net

Аннотация

Гурьянова Т.В. Границы применимости критерия Келли для динамического управления капиталом в случае усеченного нормального распределения доходности торговой системы. *Найдена область применения критерия Келли. Определен оптимальный алгоритм для определения доли капитала для реинвестирования, основанный на критерии Келли.*

Введение.

Любая торговая система (ТС) может быть охарактеризована одномерным законом распределения вероятностей ее выходных случайных величин $\{x_i\}$ (выигрышей и проигрышей) на интервале стационарности их реализации τ_{cm}. В большинстве практических случаев распределение доходностей подчиняется нормальному закону распределения, что вытекает из центральной предельной теоремы теории вероятностей (когда на систему действует одновременно большое количество разнонаправленных случайных факторов). В этом случае на интервале стационарности τ_{cm} система характеризуется двумя числовыми характеристиками: математическим ожиданием $M > 0$ и дисперсией σ^2, которые являются постоянными и не зависят от времени.

В то же время, для реальной торговой системы на значения $\{x_i\}$ накладываются некоторые ограничения, которые в нашем исследовании сформулированы следующим образом: максимальный проигрыш системы не может быть больше 100%, максимальный выигрыш не может превышать значения 100%. Таким образом, $x_i \in [-1;+1],\ i = 1,...,n$.

Т.к. в рассматриваемой торговой системе возможен проигрыш всех вложенных в сделку средств (при $x_k = -1$), то инвестору следует вкладывать в каждую совершаемую сделку только часть своего капитала f. Следовательно, после n сделок капитал игрока можно найти по формуле:

$$K_n = K_0 \cdot \prod_{i=1}^{n} (1 + x_i \cdot f), \qquad (1)$$

где K_n - капитал игрока после n сделок, K_0 - первоначальный капитал игрока, x_i - выигрыш (проигрыш) системы в i-й сделке, f - часть капитала, вложенная в каждую сделку (причем, $0 \le f \le 1$). Тогда коэффициент приумножения капитала за n сделок:

$$\frac{K_n}{K_0} = exp\left(n\, ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right)^{\frac{1}{n}} \right) = e^{n\, ln G}, \qquad (2)$$

где G - среднее геометрическое доходности или темп роста капитала (капитал экспоненциально растет, если $G > 1$ и экспоненциально уменьшается при $G < 1$). Дж. Келли в [1] , показал, что для максимизации капитала необходимо максимизировать логарифм ожидаемой средней геометрической доходности G.

Общая постановка проблемы. В монографии [2] Р. Винсом был предложен параметрический метод определения оптимальной части капитала f при реинвестировании. В этом случае для нахождения f необходимо максимизировать логарифм темпа роста капитала при реинвестировании, что может быть выражено выражением:

$$ln G\big|_{max} = \int_{-1}^{1} ln(1 + f \cdot x) \cdot w(x) \cdot dx, \qquad (3)$$

где $w(x)$ - заданная функция плотности вероятности закона распределения доходности системы. При анализе выражения (3) использовался метод Ньютона [3]. Для заданного закона распределения $w(x)$ методом Симпсона [3] рассчитывалось значение интеграла (3), затем выбиралось начальное приближение значения f (как правило $f = 0{,}5$), далее проводилось уточнение решения. Расчеты значений f проводилось с точностью до 10^{-3}, поиск решения проводился на отрезке $f \in [0; +1]$. Численное моделирование проводилось в среде табличного процессора MS Excel.

Расчеты значений доли капитала для реинвестирования f проводилось для $M \in [0{,}02; 1]$ с шагом $0{,}02$, $\sigma \in [0{,}02; 1]$ с шагом $0{,}02$.

Из анализа полученных результатов следует, что существует достаточно широкая область значений параметров M и σ, для которых значение f почти не отличается от 1 (так, при любых значениях M и $\sigma \le 0{,}14$ значение $f \ge 0{,}999$). В таких торговых системах применение критерия Келли приведет к разорению. Также, существует область значений параметров M и σ, для которых значение темпа роста капитала $G < 1$. В торговых системах, генерирующих временные ряды с такими параметрами, применение критерия Келли для нахождения доли капитала для реинвестирования приведет к разорению инвестора с вероятностью, равной 1.

Поэтому при проведении дальнейших исследований эти области исключались из рассмотрения, рассматривались торговые системы, генерирующие прибыли и убытки с параметрами M и σ, находящимися внутри области, изображенной на диаграмме (рис. 1).

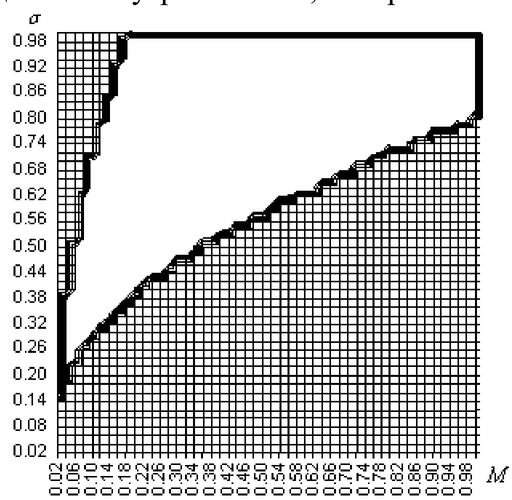

Рисунок 1. Область применения критерия Келли для случая нормального усеченного закона распределения доходности торговой системы.

В результате данных расчетов были найдены доли для реинвестирования $f(M, \sigma)$ и соответствующие им темпы роста капитала $G(M, \sigma)$ в зависимости от характеристик временного ряда, генерируемого торговой системой.

В реальности дело обстоит несколько иначе: при работе торговой системы характеристика M изменяется со временем и применение найденных значений $f(M,\sigma)$ не является оптимальным.

Для имитации нестационарности торговой системы были смоделированы данные с постоянным значением σ и переменным M. В работе рассматривался случай плавного изменения M системы во времени. (рис. 2). Для анализа эффективности управления капиталом для нестационарного ряда использовался метод Монте-Карло.

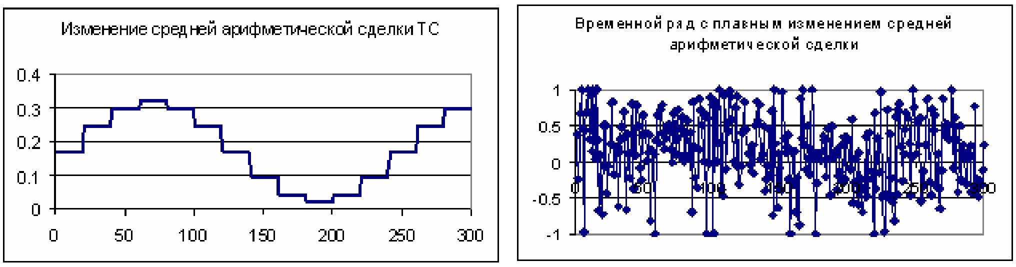

Рисунок 2. Пример временного ряда, сгенерированного торговой системой с плавно изменяющейся средней арифметической сделкой.

Было сгенерировано 80 временных рядов $\{x_i\}$ с $\sigma = 0{,}47$ и $M \in [0{,}06; 0{,}32]$ по 300 сделок в каждом. Были протестированы следующие адаптивные алгоритмы динамического управления капиталом:

- алгоритм №1 $K|_{max} = \prod_{j=1}^{\tau}(1 + x_j \cdot f)$;

- алгоритм №2 [4] $K|_{max} = \prod_{j=1}^{\tau}\left(1 + \frac{(-x_j)}{x_k} \cdot f\right)$;

- алгоритм №3 [4], где $m = 2$ $K|_{max} = \prod_{j=1}^{\tau}\left(1 + \frac{-EMA[x_j]}{EMA[x_k]} \cdot F_2\right)$;

- алгоритм №4 [4], где $m = 5$ $F_3 = EMA[f^*{}_j] + \frac{2}{m+1}\left(f_j^* - EMA[f^*{}_{j-1}]\right)$.

Расчеты проводились следующим образом: в ряде $\{x_i\}$, $i = 1,\ldots,300$ первые 100 сделок считались историческими данными (т.е. во внимание при подсчете коэффициента умножения капитала K не принимались), а на сделках №101-300 проводился подсчет коэффициента умножения капитала $K^1{}_\tau, K^2{}_\tau, K^3{}_\tau, K^4{}_\tau$ для каждого из предложенных алгоритмов для периода адаптации $\tau = 10, 20, \ldots, 50$, данные заносились в таблицу. В каждой строке таблицы выбиралось K_{max} и данные каждой строки нормировались на этот коэффициент.

Рассмотрим коэффициенты, полученные для временного ряда №1 при $\tau = 10$: $K^1{}_{10} = 0, K^2{}_{10} = 296, K^3{}_{10} = 334, K^4{}_{10} = 1173$, тогда $K_{max} = 1173$ и $K^1{}_{10}/K_{max} = 0$, $K^2{}_{10}/K_{max} = 0{,}25, K^3{}_{10}/K_{max} = 0{,}28, K^4{}_{10}/K_{max} = 1$. Выражение $K^1{}_{10}/K_{max} = 0$ означает, что при применении алгоритма ДУК №1 при интервале адаптации $\tau = 10$ капитал игрока упал до нуля; $K^4{}_{10}/K_{max} = 1$ означает, что из всех алгоритмов ДУК алгоритм №4 дал наилучший коэффициент умножения капитала, т.е. этот алгоритм – наилучший для этой ТС на данном интервале адаптации; значения $K^2{}_{10}/K_{max} = 0{,}25, K^3{}_{10}/K_{max} = 0{,}28$ показывают, что на данном интервале адаптации $\tau = 10$ для данной ТС алгоритмы №2, 3 не являются оптимальными и дают умножение капитала в, соответственно, 4 и 3,6 раза меньше, чем алгоритм №4.

Результаты анализа гистограммы распределения доходностей приведены в Таблице 1.

Таблица 1. Результаты анализа гистограммы распределения доходностей для периода адаптации $\tau = 10$.

K/K_{max}	**Алгоритм №1**	**Алгоритм №2**	**Алгоритм №3**	**Алгоритм №4**
$K/K_{max}=0$	27	0	3	0
$0<K/K_{max} \leq 0,5$	38	63	40	48
$0,5<K/K_{max} \leq 0,99$	8	8	28	19
$K/K_{max}=1$	7	9	9	13

При сравнении распределений показателя доходностей для разных алгоритмов установлено статистически значимое их различие (χ^2=96,4, p<0,001). Из проведенного анализа следует, что на периоде адаптации $\tau = 10$ наибольшее количество разорений – 27 приносит алгоритм №1, наибольшее количество максимального умножения капитала – 13 – алгоритм №4.

Аналогичный анализ проведен для периодов адаптации $\tau = 10,20,...,50$. Результаты приведены в таблице 2.

Таблица 2. Результаты анализа гистограммы распределения доходностей при $\tau = 10,20,...,50$.

	Алгоритм №2					**Алгоритм №3**					**Алгоритм №4**				
	10	**20**	**30**	**40**	**50**	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**
$K/K_{max}=0$	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$0<K/K_{max} \leq 0,5$	75	67	57	56	56	55	42	34	43	52	78	66	60	60	58
$0,5<K/K_{max} \leq 0,99$	4	11	22	22	20	11	24	30	26	20	1	12	16	18	22
$K/K_{max}=1$	1	2	1	2	4	11	14	16	11	8	1	2	4	2	0

Распределение значений доходностей для разных алгоритмов статистически значимо различается (χ^2=203,6, p<0,001). Из проведенного анализа может быть сделан вывод, что статистически наиболее оптимальный алгоритм ДУК – алгоритм №3 (однако его нецелесообразно применять при интервале адаптации $\tau = 10$). Оптимальным интервалом адаптации при данных условиях $(\sigma = 0,47, M \in [0,06; 0,32], \tau_{cm} = 20)$ является интервал $\tau = 30$.

Выводы.

1. Проведенный анализ позволяет сделать вывод об общих закономерностях зависимостей $f(M,\sigma)$ и $G(M,\sigma)$ от параметров торговой системы и выбрать оптимальные параметры моделей торговых систем и оптимальные алгоритмы ДУК.
2. Наилучшим алгоритмом для нахождения оптимальной доли для реинвестирования является алгоритм №3.

Литература

1. J. L. Kelly Jr. A New Interpretation of Information Rate. The Bell System Technical Journal, 35(4), 1956. – P. 917-926.

2. Винс Р. Математика управления капиталом. Методы анализа риска для трейдеров и портфельных менеджеров: Пер. с англ. – М.: Альпина Паблишер, 2001. – 400 с.

3. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – 6-е изд. – М. : Бином, 2008. – 636 с.

4. Смирнов А.В., Гурьянова Т.В. Новое в динамическом управлении. Наукові праці Донецького національного технічного університету, серія «Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка», вип. 10 (153), Донецк, ДонНТУ, 2009. – С. 230-233.