

С. Ю. Гоголенко (аспирант)

Донецкий национальный технический университет

gogolenko@cs.dgtu.donetsk.ua

АЛГЕБРАИКО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГРАФОВ ВТОРИЧНОЙ ТОПОЛОГИИ

В работе рассматриваются свойства различных спектров разностных сеток на геометрических графах. Выводятся соотношения, характеризующие спектры при бесконечном уменьшении шага дискретизации. В ходе изучения поведения спектра при уменьшении шага дискретизации строится гипотеза о характере зависимости между наибольшими собственными числами матрицы Лапласа, шагом дискретизации и свойствами сети, эта гипотеза доказывается для случая графа-звезды. Результаты сравниваются с несколькими хорошо известными оценками для наибольшего собственного числа матрицы Лапласа произвольного графа, полученными Фидлером, Андерсоном и Морли, Ли и Чаном.

граф вторичной топологии, спектр графа, матрица смежности, Лапласиан графа

Введение

Знание алгебраических свойств и, в особенности, знание спектров сеток на геометрических графах, называемых также графами вторичной топологии (рис. 1), часто оказывается полезным при анализе численных методов решения дифференциальных уравнений на геометрических графах, поскольку в матрично-векторном представлении дискретизированных по пространству дифференциальных уравнений на графах обычно присутствуют различные матрицы графа вторичной топологии.

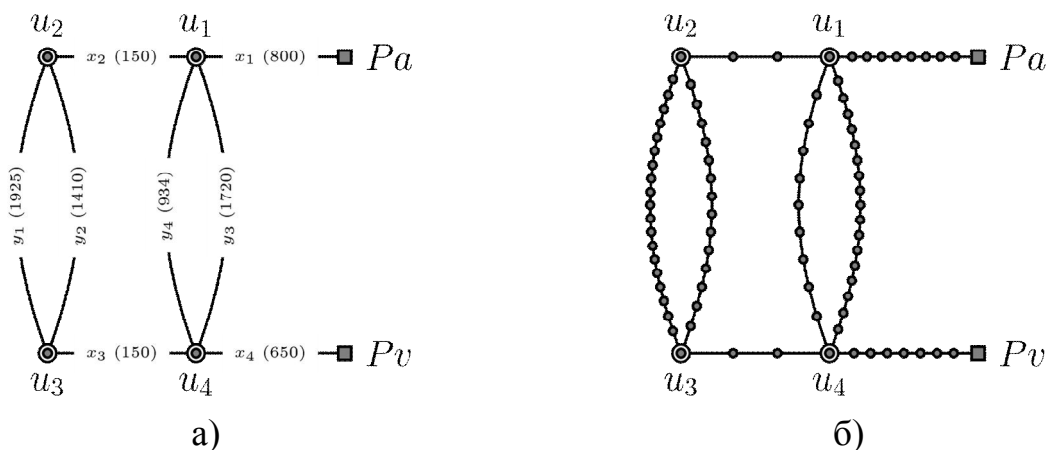


Рисунок 1 – Геометрический граф (а) и его граф вторичной топологии (б) при значении шага дискретизации по пространству $\Delta x = 100$

В первую очередь это вершинно-рёберная матрица $(0,1,-1)$ -инциденций $\mathcal{V}_{\Delta x}$. Но встречаются также и другие матрицы, как, например, матрица весов

$W_{\Delta x}$ вершинно-рёберная матрица $(0,1,1)$ -инциденций $\hat{V}_{\Delta x}$, взвешенная матрица $(0,1,1)$ -инциденций $W_{\Delta x} = \mathcal{D}_{\Delta x}^{-1} \hat{V}_{\Delta x}$. Т. к. имеют место тождества

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\Delta x}^{(k)} \mathcal{V}_{\Delta x} \left(\mathcal{D}_{\Delta x}^{(k)} \mathcal{V}_{\Delta x} \right)^T &= \mathcal{D}_{\Delta x}^k \mathcal{L}_{\Delta x} \mathcal{D}_{\Delta x}^k; \\ \mathcal{D}_{\Delta x}^{(k)} \hat{\mathcal{V}}_{\Delta x} \left(\mathcal{D}_{\Delta x}^{(k)} \hat{\mathcal{V}}_{\Delta x} \right)^T &= \mathcal{D}_{\Delta x}^k \hat{\mathcal{L}}_{\Delta x} \mathcal{D}_{\Delta x}^k, \end{aligned}$$

где $\mathcal{L}_{\Delta x} = \mathcal{L}(\Gamma_{\Delta x}) = \mathcal{D}_{\Delta x} - \mathcal{A}_{\Delta x}$ — классическая матрица Лапласа графа $\Gamma_{\Delta x}$, $\hat{\mathcal{L}}_{\Delta x} = \hat{\mathcal{L}}(\Gamma_{\Delta x}) = \mathcal{D}_{\Delta x} + \mathcal{A}_{\Delta x}$ — положительная матрица Лапласа графа $\Gamma_{\Delta x}$, $\mathcal{A}_{\Delta x} = \mathcal{A}(\Gamma_{\Delta x})$ — матрица смежности графа $\Gamma_{\Delta x}$, $\mathcal{D}_{\Delta x} = \mathcal{A}(\Gamma_{\Delta x})$ — матрица степеней графа $\Gamma_{\Delta x}$, то исследуя алгебраические свойства матриц

$$\mathcal{W}_{\Delta x}^{(k)} = \mathcal{D}_{\Delta x}^k \mathcal{L}_{\Delta x} \mathcal{D}_{\Delta x}^k \text{ и } \hat{\mathcal{W}}_{\Delta x}^{(k)} = \mathcal{D}_{\Delta x}^k \hat{\mathcal{L}}_{\Delta x} \mathcal{D}_{\Delta x}^k, \quad k \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

можно многое узнать об алгебраических свойствах $\mathcal{V}_{\Delta x}$, $\hat{\mathcal{V}}_{\Delta x}$, $\mathcal{D}_{\Delta x}^{-1} \mathcal{V}_{\Delta x}$ и т. д. Другой важный и играющий ключевую роль в спектральной теории графов [1, 2] класс матриц составляют матрицы вида

$$\mathcal{M}_{\Delta x}^{(\mu)} = \mu \mathcal{D}_{\Delta x} + \mathcal{A}_{\Delta x}, \quad \mu \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

В частности матрицей вида $\mathcal{M}_{\Delta x}^{(\mu)}$ является матрица смежности $\mathcal{A}_{\Delta x} = \mathcal{M}_{\Delta x}^{(0)}$ и положительная матрица Лапласа $\hat{\mathcal{L}}_{\Delta x} = \mathcal{M}_{\Delta x}^{(1)}$, а спектр классической матрицы Лапласа $\mathcal{L}_{\Delta x}$ состоит из значений, противоположных собственным значениям матрицы $\mathcal{M}_{\Delta x}^{(-1)}$.

К настоящему времени построено множество оценок для различных спектров графов общего вида [3, 4, 5, 6, 7]. В данной работе предпринята попытка построить оценки для спектров графов вторичных топологий, усиливающие известные ранее оценки для графов общего вида.

Предельное расположение собственных чисел в спектрах графов вторичной топологии

Матрицы $\mathcal{W}_{\Delta x}^{(k)}$, $\hat{\mathcal{W}}_{\Delta x}^{(k)}$ и $\mathcal{M}_{\Delta x}^{(\mu)}$ представляют собой частный случай симметричных матриц на графах вторичных топологии, исследуемых в работе [8]. Удобным инструментом для исследования алгебраико-аналитических свойств таких матриц является следующая теорема

Теорема 1. (С.Ю. Гоголенко [8]) Пусть $s \stackrel{\text{def}}{=} \min_{i \in \mathcal{I}} s_i$. Тогда при $s \rightarrow \infty$ собственные значения матрицы Λ стремятся к значениям из некоторого счётного подмножества множества

$$\Lambda^\infty = \Lambda_1^\infty \cup \Lambda_2^\infty \cup \Lambda_3^\infty, \quad (3)$$

где

$$\Lambda_1^\infty \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i \in \mathcal{I}} [a_i - 2|b_i|, a_i + 2|b_i|], \quad (4)$$

$$\Lambda_2^\infty \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \bigcup_{k \in \{0, s_i\}} \left\{ a_{i,k} + \frac{b_i^2}{a_i^{(d)} - a_i} : \left| \frac{a_{i,k} - a_i}{b_i} \right| > 1 \right\}, \quad (5)$$

$$\Lambda_3^\infty \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{I \in \mathcal{I}} \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \setminus (\Lambda_1^\infty \cup \Lambda_2^\infty) : \lambda - d_I - \sum_{j \in \mathcal{I}_I} \frac{b_{j, \sigma_I(j)}^2}{b_j \omega_j + a_j - a_{j, \sigma_I(j)}} = 0 \right\}. \quad (6)$$

Причём

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \lambda_{\min} = \inf \Lambda^\infty, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \lambda_{\max} = \sup \Lambda^\infty. \quad (7)$$

Так, опираясь на теорему 1, можно установить поведение спектра матриц $\mathcal{W}_{\Delta x}^{(k)}$, $\hat{\mathcal{W}}_{\Delta x}^{(k)}$ и $\mathcal{M}_{\Delta x}^{(\mu)}$ при бесконечном уменьшении шага дискретизации по пространству Δx . Имеет место следующее

Утверждение 1. При $\Delta x \rightarrow 0$ собственные значения матриц $\mathcal{W}_{\Delta x}^{(k)}$ и $\hat{\mathcal{W}}_{\Delta x}^{(k)}$ стремятся к значениям из некоторого счётного подмножества S множества

$$\Lambda^\infty = [0, 4^{k+1}] \cup \begin{cases} \emptyset, & \text{если } k \leq -1/2; \\ \bigcup_{J \in \mathcal{J}} \left\{ \frac{m_J^{4k+2}}{m_J^{2k+1} - 4^k} \right\}, & \text{если } k > -1/2, \end{cases} \quad (8)$$

плотного в Λ^∞ . Причём

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lambda_{\min} = 0, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lambda_{\max} = \begin{cases} 4^{k+1}, & \text{если } k \leq -1/2; \\ \frac{\Delta^{4k+2}(\Gamma_{\Delta x})}{\Delta^{2k+1}(\Gamma_{\Delta x}) - 4^k}, & \text{если } k > -1/2. \end{cases} \quad (9)$$

Доказательство. В том случае, когда матрица имеет вид $\mathcal{W}_{\Delta x}^{(k)}$, выполняются соотношения $d_J = m_J^{2k+1}$, $a_{i,j} = 2^{2k+1}$ ($j = \overline{1, s_i - 1}$), $b_{i,j} = -4^k$ ($j = \overline{1, s_i - 1}$), $b_{i,0} = -(2m_{I^-})^k$, $b_{i,s_i} = -(2m_{I^+})^k$. Поэтому

$$\Lambda_1^\infty = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} [a_i - 2|b_i|, a_i + 2|b_i|] = [0, 4^{k+1}]; \quad \Lambda_2^\infty = \emptyset$$

Перейдём к элементам $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \Lambda_1^\infty$. Воспользуемся заменой $\lambda = a + b(\omega + \omega^{-1}) = 4^k(2 - \omega - \omega^{-1})$, $\omega \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, которая однозначна при $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \Lambda_1^\infty$. Тогда

$$\begin{aligned} \lambda - d_J - \sum_{i \in \mathcal{I}_J} \frac{(b_i^{(d)})^2}{b_i \omega + a_i - a_i^{(d)}} &= \lambda - m_J^{2k+1} - \frac{m_J^{2k+1}}{\omega} = \\ &= 4^k(2 - \omega - \omega^{-1}) - m_J^{2k+1} - m_J^{2k+1} \omega^{-1} = 4^k(1 - \omega^{-1}) \left(\omega + 2 \left(\frac{m_J}{2} \right)^{2k+1} - 1 \right). \end{aligned}$$

Таким образом

$$\Lambda_3^\infty = \bigcup_{J \in \mathcal{J}} \left\{ 4^k(2 - \omega - \omega^{-1}) : \omega = 1 - 2 \left(\frac{m_J}{2} \right)^{2k+1}, \omega \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \right\}.$$

Поскольку степени внутренних вершин $m_J \geq 3$, то $1 - 2(m_J/2)^{2k+1} < -1$ при $k > -1/2$. Если же $k < -1/2$, то $-1 < 1 - 2(m_J/2)^{2k+1} < 1$. Это позволяет упростить выражение для Λ_3^∞

$$\Lambda_3^\infty = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } k \leq -1/2; \\ \bigcup_{J \in \mathcal{J}} \left\{ 4^k(2 - \omega_J - \omega_J^{-1}) : \omega_J = 1 - 2 \left(\frac{m_J}{2} \right)^{2k+1} \right\}, & \text{если } k > -1/2. \end{cases}$$

Принимая во внимание то, что

$$\lambda_J = 4^k(2 - \omega_J - \omega_J^{-1}) = \frac{m_J^{4k+2}}{m_J^{2k+1} - 4^k},$$

и $\Lambda^\infty = \Lambda_1^\infty \cup \Lambda_2^\infty \cup \Lambda_3^\infty$, в итоге получаем (8). Воспользовавшись утверждением 1, можно оценить предельные значения евклидовой нормы матрицы инцидентности и некоторых других матриц графа.

Следствие 1. В пределе при $\Delta x \rightarrow 0$ имеют место следующие равенства

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \|\mathcal{V}_{\Delta x}\|_2 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \|\hat{\mathcal{V}}_{\Delta x}\|_2 = \frac{\Delta(\Gamma_{\Delta x})}{\sqrt{\Delta(\Gamma_{\Delta x}) - 1}}; \quad (10)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \|\mathbf{D}^{-1}\hat{\mathcal{V}}_{\Delta x}\|_2 = 1; \quad (11)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \|\mathbf{D}^k\hat{\mathcal{V}}_{\Delta x}\|_2 = \begin{cases} 2^{k+1}, & \text{если } k \leq -1/2; \\ \frac{\Delta^{2k+1}(\Gamma_{\Delta x})}{\sqrt{\Delta^{2k+1}(\Gamma_{\Delta x}) - 4^k}}, & \text{если } k > -1/2. \end{cases} \quad (12)$$

Доказательство.¹ Формула (10) является прямым следствием утверждения 1 и определения евклидовой нормы через спектральный радиус произведения исходной матрицы на сопряжённую к ней

$$\begin{aligned} \|\mathcal{V}_{\Delta x}\|_2^2 &= \lambda_{\max}[\mathcal{V}_{\Delta x}\mathcal{V}_{\Delta x}^*] = \lambda_{\max}[\mathcal{L}_{\Delta x}] = \frac{\Delta^2(\Gamma_{\Delta x})}{\Delta(\Gamma_{\Delta x}) - 1} \\ \|\hat{\mathcal{V}}_{\Delta x}\|_2^2 &= \lambda_{\max}[\hat{\mathcal{V}}_{\Delta x}\hat{\mathcal{V}}_{\Delta x}^*] = \lambda_{\max}[\hat{\mathcal{L}}_{\Delta x}] = \frac{\Delta^2(\Gamma_{\Delta x})}{\Delta(\Gamma_{\Delta x}) - 1} \end{aligned}$$

Формула (12) доказывается аналогично

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}_{\Delta x}^k\hat{\mathcal{V}}_{\Delta x}\|_2^2 &= \lambda_{\max}[\mathcal{D}_{\Delta x}^k\hat{\mathcal{V}}_{\Delta x}(\mathcal{D}_{\Delta x}^k\hat{\mathcal{V}}_{\Delta x})^*] = \lambda_{\max}[\mathcal{D}_{\Delta x}^k\hat{\mathcal{V}}_{\Delta x}\hat{\mathcal{V}}_{\Delta x}^T\mathcal{D}_{\Delta x}^k] = \\ &= \lambda_{\max}[\mathcal{D}_{\Delta x}^k\hat{\mathcal{L}}_{\Delta x}\mathcal{D}_{\Delta x}^k] = \lambda_{\max}[\mathcal{W}_{\Delta x}^{(k)}]. \quad \square \end{aligned}$$

Из спектральной теории графов известно, что основные спектры графов задают корни полиномов

$$F_\mu(\lambda) = F(\lambda, \mu) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathcal{M}_{\Delta x}^{(\mu)}), \quad \mu \in \mathbb{R}. \quad (13)$$

Подстановка в формулу (3) значений $a = 2\mu$, $b = 1$ и $d_J = m_J\mu$, по аналогии с утверждением 1 даёт

Утверждение 2. При $\Delta x \rightarrow 0$ корни многочленов $F_\mu(\lambda)$ и $F_{-\mu}(-\lambda)$, $\mu \in \mathbb{R}^+$ стремятся к значениям из некоторого счётного подмножества S множества

$$\Lambda^\infty = [2(\mu - 1), 2(\mu + 1)] \cup \left(\bigcup_{J \in \mathcal{J}} \{2\mu + \omega_J + \omega_J^{-1}\} \right), \quad (14)$$

где

¹ С целью сокращения записи далее в доказательстве опущен знак предела $\lim_{\Delta x \rightarrow \infty}$

$$\omega_J = \mu \left(\frac{m_J}{2} - 1 \right) + \sqrt{\mu^2 \left(\frac{m_J}{2} - 1 \right)^2 + m_J - 1}.$$

В частности, для матрицы смежности ($P_A(\lambda) = F_0(\lambda)$) получаем

$$\Lambda^\infty = [-2, 2] \cup \left(\bigcup_{J \in \mathcal{J}} \left\{ \frac{m_J}{\sqrt{m_J - 1}} \right\} \right),$$

а для матрицы Лапласа ($P_L(\lambda) = (-1)^n F_{-1}(-\lambda)$)

$$\Lambda^\infty = [0, 4] \cup \left(\bigcup_{J \in \mathcal{J}} \left\{ \frac{m_J^2}{m_J - 1} \right\} \right).$$

Скорость сходимости спектра матрицы Лапласа звезды к предельным значениям

Практическое применение формул, содержащихся в утверждениях 1 и 2, не смотря на их простоту, связано с рядом трудностей. Основная из них заключается в том, что теорема 1 и основанные на ней утверждения не дают представления о том, как быстро с ростом размерности минимального блока L_i , а следовательно и с уменьшением шага Δx собственные значения матриц сходятся к своим предельным значениям. Исследование этого вопроса начнём с изучения свойств спектра равносторонней звезды. При этом под равносторонней звездой $S_{m,n}$ понимается граф, составленный путём замены каждого из рёбер классической m -звезды S_m на путь P_n длины n . Поскольку при достаточно малом шаге дискретизации по пространству Δx любой граф вторичной топологии представим в виде комбинации путей и равносторонних звёзд, то полученные в данном параграфе оценки для максимального собственного значения лапласиана равносторонней звезды могут быть полезны при выводе подобных оценок для произвольных графов.

Теорема 2. Характеристический полином лапласиана куска пути длины n имеет вид

(i) если путь не имеет границ

$$P_{P_0^{(n)}}(\lambda) = (-1)^n U_n \left(1 - \frac{\lambda}{2} \right) \quad (15)$$

(ii) если путь имеет одну границу

$$P_{P_1^{(n)}}(\lambda) = (-1)^{n-1} \lambda U_{n-1} \left(1 - \frac{\lambda}{2} \right) \quad (16)$$

(iii) если путь имеет обе границы

$$P_{P_2^{(n)}}(\lambda) = (-1)^n V_n \left(1 - \frac{\lambda}{2} \right) \quad (17)$$

Доказательство. Лапласиан пути без границ имеет собственные числа

$$\lambda_k = 2 - 2 \cos \frac{k\pi}{n+1}, \quad k = \overline{1, n}$$

В свою очередь корни полинома Чебышева второго рода имеют вид

$$x_k = \cos \frac{k\pi}{n+1}, \quad k = \overline{1, n}$$

Сопоставляя оба выражения и учитывая то, что старший коэффициент в характеристическом полиноме равен 1 получаем (15). Аналогично доказываются формулы (16) и (17).

Основываясь на теореме 2 можно выразить характеристический полином лапласиана равносторонней звезды через полиномы Чебышева второго рода.

Теорема 3. Характеристический полином лапласиана равносторонней m -звезды определяется выражением

$$P_{S_{m,n}}(\lambda) = (-1)^{mn} V_n^{m-1} \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \left((\lambda - m) V_n \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) + m V_{n-1} \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \right) \quad (18)$$

Доказательство. Лапласиан равносторонней m -звезды имеет вид

$$\mathcal{L}(S_{m,n}) = \begin{pmatrix} m & -\mathbf{1}_m^T \otimes \mathbf{e}_n^T \\ -\mathbf{1}_m \otimes \mathbf{e}_n & -I_m \otimes \mathcal{L}(P_n) \end{pmatrix} \quad (19)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} P_{S_{m,n}}(\lambda) &= \det \mathcal{L}(S_{m,n}) = \det (I_m \otimes (\lambda I_n - \mathcal{L}(P_n))) \times \\ &\quad \times \det (\lambda - m - (\mathbf{1}_m^T \otimes \mathbf{e}_n^T) (I_m \otimes (\lambda I_n - \mathcal{L}(P_n))) (\mathbf{1}_m \otimes \mathbf{e}_n)) = \\ &= (P_n(\lambda))^m (\lambda - m - \mathbf{1}_m^T I_m \mathbf{1}_m \otimes \mathbf{e}_n^T (\lambda I_n - \mathcal{L}(P_n))^{-1} \mathbf{e}_n) = \\ &= (P_n(\lambda))^m \left(\lambda - m - m \otimes \frac{\det (\lambda I_{n-1} - \mathcal{L}(P_{n-1}))}{\det (\lambda I_n - \mathcal{L}(P_n))} \right) = \\ &= (P_n(\lambda))^{m-1} ((\lambda - m) P_n(\lambda) - m P_{n-1}(\lambda)) = \\ &= \left((-1)^n V_n \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \right)^{m-1} \times \\ &\quad \times \left((\lambda - m) (-1)^n V_n \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) - m (-1)^{n-1} V_{n-1} \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \right) = \\ &= (-1)^{mn} V_n^{m-1} \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \left((\lambda - m) V_n \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) + m V_{n-1} \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \right). \quad \square \end{aligned}$$

Воспользовавшись выражением (18) для характеристического полинома звезды из теоремы 3, получаем

Следствие 2. Спектр лапласиана равносторонней звезды содержит

(i) единственный корень в интервале $[4, \infty)$, определяемый выражением

$$\lambda_1 = \frac{(\omega + 1)^2}{\omega}, \quad (20)$$

где ω является решением уравнения

$$(\omega + 1 - m) \omega^{2n} + \omega^{-1} + 1 - m = 0 \quad \omega \in (1, +\infty)$$

(ii) корни

$$\lambda = 2 - 2 \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n+1}, \quad k = \overline{1, n} \quad (21)$$

кратности $m-1$

(iii) $n-2$ корня, определяемых формулой

$$\lambda = 2 - 2 \cos \theta, \quad (22)$$

где θ является решением уравнения

$$\sin(n+1)\theta + (m-1) \sin n\theta = 0, \quad \theta \in (0, \pi)$$

(iv) единственный корень

$$\lambda_{mn} = 0 \quad (23)$$

Доказательство. $n(m-1)$ корней многочлена $P_{S_{m,n}}(\cdot)$ составляют корни полинома Чебышева второго рода $V_n(\cdot)$, каждый взятый с кратностью $m-1$. Оставшиеся n корней $P_{S_{m,n}}$ являются корнями полинома

$$Q_n(\lambda) = (\lambda - m) V_n \left(1 - \frac{\lambda}{2} \right) + m V_{n-1} \left(1 - \frac{\lambda}{2} \right).$$

Поскольку матрица $\mathcal{L}(S_{m,n})$ симметрична и положительно полуопределена, то все её корни $Q_n(\lambda)$ вещественны и неотрицательны. Рассмотрим случай $0 \leq \lambda \leq 4$. Произведём замену $\lambda = 2 - 2 \cos \theta$, $\theta \in [0, \pi]$. Тогда, согласно определению полинома Чебышева (см. [9]),

$$\begin{aligned} Q_n(\lambda) &= (2 - 2 \cos \theta - m) V_n(\cos \theta) + m V_{n-1}(\cos \theta) = \\ &= (2 - 2 \cos \theta - m) \frac{\cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \theta}{\cos \frac{\theta}{2}} + m \frac{\cos \left(n - \frac{1}{2} \right) \theta}{\cos \frac{\theta}{2}} = \\ &= 2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} (\sin(n+1)\theta + (m-1) \sin n\theta) \end{aligned}$$

Приравнявая $\theta = 0$, находим очевидный корень $\lambda = 0$. В то же время $\theta \neq \pi$, поскольку такое значение θ не входит в область определения функции $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$. Перейдём к случаю, когда $\lambda > 4$. Произведём замену $\lambda = \frac{(\omega+1)^2}{\omega} = \omega + \omega^{-1} + 2$, $\omega > 1$. Тогда (см. [9])

$$\begin{aligned} Q_n(\lambda) &= (2 + \omega + \omega^{-1} - m) V_n \left(-\frac{1}{2} (\omega + \omega^{-1}) \right) + m V_{n-1} \left(-\frac{1}{2} (\omega + \omega^{-1}) \right) = \\ &= (2 + \omega + \omega^{-1} - m) \frac{(-\omega)^{n+1} - (-\omega)^{-n}}{-\omega + 1} + m \frac{(-\omega)^n - (-\omega)^{-(n-1)}}{-\omega + 1} = \\ &= (-1)^{n+1} \frac{1 + \omega}{1 - \omega} ((\omega + 1 - m) \omega^n + (\omega^{-1} + 1 - m) \omega^{-n}). \end{aligned}$$

Поэтому согласно условиям замены корень $\lambda = 2 + \omega + \omega^{-1} > 4$ многочлена $Q_n(\lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$(\omega + 1 - m) \omega^n + (\omega^{-1} + 1 - m) \omega^{-n} = 0, \quad \omega \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$$

и является наибольшим из корней $P_{S_{m,n}}(\cdot)$.

Следствие 3. Максимальные собственные числа лапласиана m -звезды $S_{m,n}$ для различных $n \in \mathbb{N}$ образуют убывающую последовательность

$$\frac{(m+1)^2}{m} > \lambda_1^{(1)} > \lambda_1^{(2)} > \dots > \lambda_1^{(n)} > \dots > \frac{m^2}{m-1} \quad (24)$$

причём

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1^{(n)} = \frac{m^2}{m-1} \quad (25)$$

и

$$\lambda_1^{(0)} = 2m \quad (26)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f_n(\omega) = (\omega + 1 - m)\omega^{2n} + \omega^{-1} + 1 - m, \quad n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

корень которой характеризует наибольшее собственное число матрицы Лапласа графа $S_{m,n}$. Т. к. $\lambda = 2 + \omega + \omega^{-1}$, то

$$f_0(m) = (m + 1 - m)m^{2 \cdot 0} + m^{-1} + 1 - m = 2 + m^{-1} - m = (2 + m^{-1} + m) - 2m = \lambda - 2m$$

Но это значит, что $f_0(m) = 0 \iff \lambda = 2m$, т. е. $\lambda_1^{(0)} = 2m$.

Пусть $\omega^{(n)}$ корни $f_n(\omega) = 0, \omega > 1$. Покажем, что

$$m > \omega^{(1)} > \omega^{(2)} > \dots > \omega^{(n)} > \dots > m - 1. \quad (27)$$

Доказательство проведём методом математической индукции. Поскольку

$$f_n(m) = (m + 1 - m)m^{2n} + m^{-1} + 1 - m = m^{2n} + m^{-1} + 1 - m > 0$$

и

$$\begin{aligned} f_n(m-1) &= ((m-1) + 1 - m)(m-1)^{2n} + (m-1)^{-1} + 1 - m \\ &= (m-1)^{-1} + 1 - m < 0 \end{aligned} \quad (28)$$

для любого $n \in \mathbb{N}$, то функция $f_n(\cdot)$ имеет вещественный корень на интервале $(m-1, m)$, и в частности

$$\begin{aligned} m &> \omega^{(1)} > m - 1. \\ f_{n+1}(\omega^{(n)}) &= (\omega^{(n)} + 1 - m)\omega^{(n)2(n+1)} + \omega^{(n)-1} + 1 - m = \\ &= \omega^{(n)2}(\omega^{(n)} + 1 - m)\omega^{(n)2n} + \omega^{(n)-1} + 1 - m + \\ &\quad + \omega^{(n)2}(\omega^{(n)-1} + 1 - m) - \omega^{(n)2}(\omega^{(n)-1} + 1 - m) = \\ &= \omega^{(n)2}((\omega^{(n)} + 1 - m)\omega^{(n)2n} + \omega^{(n)-1} + 1 - m) + \\ &\quad + (1 - \omega^{(n)2})(\omega^{(n)-1} + 1 - m) = \\ &= \omega^{(n)2}f_n(\omega^{(n)}) + (1 - \omega^{(n)2})(\omega^{(n)-1} + 1 - m) \end{aligned}$$

Т. к. $f_n(\omega^{(n)}) = 0$, а оба сомножителя во втором слагаемом всегда отрицательны (их произведение положительно), имеем $f_{n+1}(\omega^{(n)}) > 0$. Из этого неравенства и неравенства (28) получаем

$$\omega^{(n)} > \omega^{(n+1)} > m - 1$$

что доказывает (27).

Поскольку отображение из ω в λ_1 непрерывно и монотонно, то из неравенства (27) автоматически следует (24). Из неравенств (24) также непосредственно следует

Следствие 4. Группы максимальных собственных чисел для лапласианов равносторонних звёзд $S_{m,n}$ при $n \geq 2$ входят в непересекающиеся интервалы, разделяемые числами $\frac{m^2}{m-1}$.

Применяя теорему Коши о среднем, можно оценить скорость сходимости последовательности наибольших собственных чисел $\lambda_1^{(n)}$ к величине $\frac{m^2}{m-1}$.

Теорема 4. Наибольшее собственное число $\lambda_1^{(n)}$ равносторонней звезды $S_{m,n}$ удовлетворяет оценкам

$$\frac{(m-2)^2 m^2}{(m-1)((m+2n)m^{2n+1}-1)} < \lambda_1^{(n)} - \frac{m^2}{m-1} < \frac{(m-2)m(m+1)}{(m-1)^{2(n+1)}-1} \quad (29)$$

Если известно, что $\lambda_1^{(n)} < 2 + \tilde{\omega} + \tilde{\omega}^{-1} < \frac{(m+1)^2}{m}$, то

$$\lambda_1^{(n)} < \frac{m^2}{m-1} + \frac{m-2}{m-1} m \frac{\tilde{\omega}^2 - 1}{(m-1)^{2(n+1)} - 1} \quad (30)$$

Доказательство. Согласно теореме Коши о среднем

$$\begin{aligned} \lambda_b - \lambda_a &= (f_n(\omega_b) - f_n(\omega_a)) \left(\frac{df_n(\xi)}{d\lambda} \right)^{-1} = (f_n(\omega_b) - f_n(\omega_a)) \left(\frac{df_n(\xi)}{d\omega} \frac{d\omega}{d\lambda} \right)^{-1} = \\ &= (f_n(\omega_b) - f_n(\omega_a)) \left(\frac{df_n(\xi)}{d\omega} (1 - \xi^{-2})^{-1} \right)^{-1} = (f_n(\omega_b) - f_n(\omega_a)) \frac{1 - \xi^{-2}}{f_n'(\xi)} \leq \\ &\leq |f_n(\omega_b) - f_n(\omega_a)| \left| \sup_{\xi \in [\omega_a, \omega_b]} \frac{1 - \xi^{-2}}{f_n'(\xi)} \right|. \end{aligned}$$

Пусть $\lambda_a = \frac{m^2}{m-1}$, $\lambda_b = \lambda_1^{(n)}$, тогда

$$\begin{aligned} |f_n(\omega_b) - f_n(\omega_a)| &= |f_n(m-1) - f_n(\omega^{(n)})| = |((m-1)^{-1} + 1 - m) - 0| = \\ &= m - 1 - (m-1)^{-1} = m \frac{m-2}{m-1} \end{aligned}$$

и вследствие неравенства (27)

$$\xi \in (m-1, \omega^{(n)}) \subset [m-1, m].$$

Поэтому с одной стороны

$$\begin{aligned}
\left| \sup_{\xi \in [\omega_a, \omega_b]} \frac{1 - \xi^{-2}}{f'_n(\xi)} \right| &\leq \left| \sup_{\xi \in [m-1, m]} \frac{1 - \xi^{-2}}{((2n+1)\xi - 2n(m-1)) \xi^{2n-1} - \xi^{-2}} \right| < \\
&< \frac{\sup_{\xi \in [m-1, m]} \xi^2 - 1}{\inf_{\xi \in [m-1, m]} ((2n+1)\xi - 2n(m-1)) \xi^{2n+1} - 1} = \\
&= \frac{m^2 - 1}{(m-1)^{2(n+1)} - 1},
\end{aligned}$$

а с другой стороны

$$\begin{aligned}
\left| \inf_{\xi \in [\omega_a, \omega_b]} \frac{1 - \xi^{-2}}{f'_n(\xi)} \right| &\geq \left| \inf_{\xi \in [m-1, m]} \frac{1 - \xi^{-2}}{((2n+1)\xi - 2n(m-1)) \xi^{2n-1} - \xi^{-2}} \right| > \\
&> \frac{\inf_{\xi \in [m-1, m]} \xi^2 - 1}{\sup_{\xi \in [m-1, m]} ((2n+1)\xi - 2n(m-1)) \xi^{2n+1} - 1} = \\
&= \frac{(m-2)m}{(m+2n)m^{2n+1} - 1}.
\end{aligned}$$

В то же время, если воспользоваться для оценивания интервалом $\xi \in (m-1, \tilde{\omega})$, где $\tilde{\lambda} = 2 + \tilde{\omega} + \tilde{\omega}^{-1} < \frac{(m+1)^2}{m}$, то

$$\begin{aligned}
\left| \sup_{\xi \in [\omega_a, \omega_b]} \frac{1 - \xi^{-2}}{f'_n(\xi)} \right| &< \frac{\sup_{\xi \in [m-1, \tilde{\omega}]} \xi^2 - 1}{\inf_{\xi \in [m-1, \tilde{\omega}]} ((2n+1)\xi - 2n(m-1)) \xi^{2n+1} - 1} = \\
&= \frac{\tilde{\omega}^2 - 1}{(m-1)^{2(n+1)} - 1} < \frac{(\tilde{\lambda} - 2)^2 - 1}{(m-1)^{2(n+1)} - 1}. \quad \square
\end{aligned}$$

Случай произвольного графа

Оценка (29) показывает, что в том случае, когда геометрический граф Γ представляет собой m -звезду с рёбрами одинаковой длины ℓ , разница между наибольшим собственным значением матрицы Лапласа графа вторичной топологии $\Gamma_{\Delta x}$ и числом $m^2/(m-1)$ составляет величину порядка $\Theta(\tilde{m}^{-2\lfloor \ell/\Delta x \rfloor})$, где $m-1 \leq \tilde{m} < m$. Таким образом, во-первых, у звёзд с большим количеством рёбер сходимость максимальных собственных чисел матрицы Лапласа вторичной топологии $\lambda_{\max}[\mathcal{L}_{\Delta x}]$ к значению $m^2/(m-1)$ происходит быстрее. Во-вторых, в случае звезды отклонение $\lambda_{\max}[\mathcal{L}_{\Delta x}]$ от $m^2/(m-1)$ с уменьшением шага дискретизации Δx уменьшается как экспонента от $(\Delta x)^{-1}$.

В то же время любой геометрический граф представим в виде набора взаимосвязанных звёзд и отрезков. Это позволяет надеяться на то, что свойства, связанные с поведением $\lambda_{\max}[\mathcal{L}_{\Delta x}]$, могут быть распространены со случая графа-звезды на случай произвольного графа Γ . Формально данное предположение можно записать следующим образом.

Гипотеза 1. Пусть

$$m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_N \geq 3$$

упорядоченная по возрастанию последовательность степеней всех внутренних вершин заданного связного геометрического графа Γ , и

$$2m_1 \geq \tilde{\lambda}_1 \geq \tilde{\lambda}_2 \geq \dots \geq \tilde{\lambda}_N > 0$$

упорядоченный по возрастанию набор из наибольших по модулю собственных значений матрицы Лапласа $\mathcal{L}_{\Delta x}$ графа вторичной топологии для Γ . Тогда

$$\tilde{\lambda}_j - \frac{m_j^2}{m_j - 1} = \Theta \left(\tilde{m}_j^{\lfloor \tilde{\ell}_j / \Delta x \rfloor} \right), \quad j = \overline{1, N}, \quad (31)$$

где $\tilde{m}_j = f(m_j)$ — некоторая положительная функция, зависящая от степени вершины и возрастающая с ростом m_j , $\tilde{\ell}_j = f(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m)$ — функция, возрастающая с ростом длин рёбер графа Γ .

Проведенные многочисленные эксперименты подтверждают эту гипотезу. Действительно, при достаточно малых шагах дискретизации Δx величина отклонения собственных чисел, находящихся вне отрезка $[0, 4]$, от их предельных значений ведёт себя как экспонента от $(\Delta x)^{-1}$. Более того, скорость сходимости к $m_j^2/(m_j - 1)$ оказалась тем выше, чем больше значение степени вершины графа m_j . В качестве примера на рис. 2 изображены спектры лапласианов вторичных топологий при различных значениях Δx для геометрического графа, представленного на рис. 1.

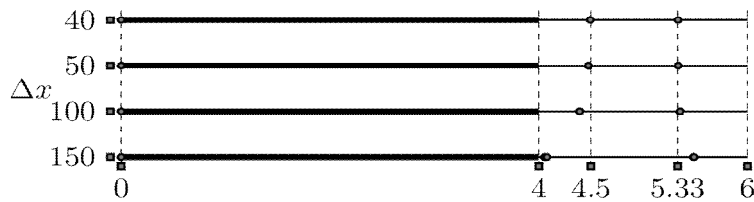


Рисунок 2 – Спектры матриц Лапласа графов вторичной топологии для сети рис. 1 при различных значения шага дискретизации по пространству Δx

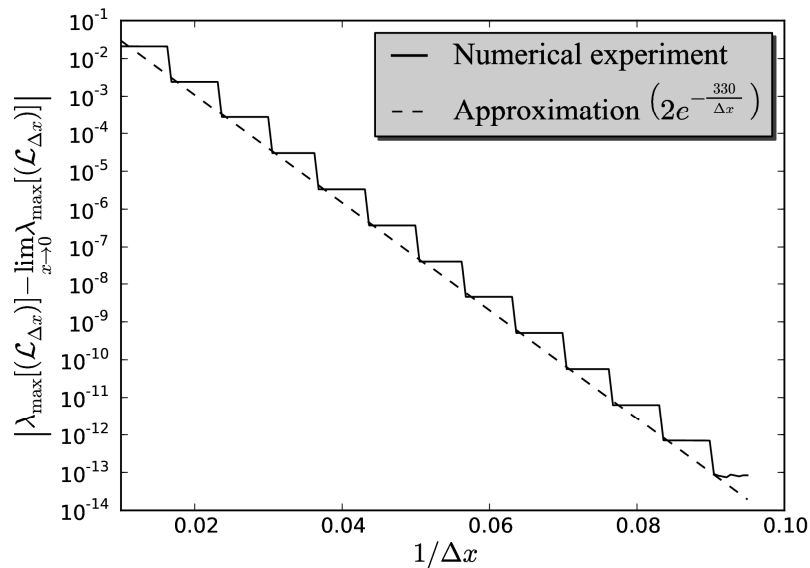


Рисунок 3 – Отклонение наибольшего собственного числа матрицы Лапласа графа вторичной топологии от предельного значения при $\Delta x \rightarrow 0$ для сети рис. 1

Как видно из рисунка, с ростом степени вершины скорость сходимости собственных чисел к предельным значениям возрастает. График рис. 3 отражает изменение с уменьшением шага Δx величины отклонения фактического значения $\lambda_{\max}[\mathcal{L}_{\Delta x}]$ от предельного значения при $\Delta x \rightarrow 0$.

Полученная экспериментально зависимость рис. 3 находится в полном соответствии с гипотезой 1.

Сравнение предельных оценок со спектральными неравенствами для матриц Лапласа произвольных графов

С другой стороны к графам вторичной топологии применимы результаты, полученные различными авторами для произвольных связных графов. При оценивании максимального собственного значения матрицы Лапласа вторичной топологии особенно удобно использовать неравенства, в которых используются инвариантные относительно операции изменения шага дискретизации Δx характеристики графа вторичной топологии. К таким инвариантам прежде всего относятся степени внутренних вершин графа. Следует также отметить, что инвариантом является количество независимых контуров $\gamma(\Gamma) = \gamma(\Gamma_{\Delta x})$. Действительно, поскольку при замене любого ребра графа на путь длины два число вершин и число рёбер одновременно увеличивается на единицу, то значение $\gamma = m - n + 1$ остаётся неизменным.

Применение основанных на знании максимальных степеней вершин графа неравенств Фидлера (M. Fiedler, 1975) [3, P.237], неравенства Андерсона-Морли (W.N. Anderson & T.D. Morley, 1985) [5, 3] и первого неравенства Ли-Чан (J. S. Li & X. D. Zhang, 1997) [5, P.288] к графу вторичной топологии $\Gamma_{\Delta x}$ в случае, когда $2\Delta x \leq \min_{i \in \mathcal{I}} \ell_{i_0}$, т. е. шаг дискретизации по пространству не превышает половины длины минимального ребра графа Γ , даёт оценки

$$\Delta(\Gamma) < \frac{n_{\Delta x}}{n_{\Delta x} - 1} \Delta(\Gamma) \leq \lambda_{\max}[\mathcal{L}_{\Delta x}] \leq 2 + \sqrt{m_1 m_2} \leq \Delta(\Gamma) + 2 \quad (32)$$

где m_1 и m_2 — два последних элемента в упорядоченном по возрастанию наборе степеней внутренних вершин графа Γ , $n_{\Delta x}$ — количество вершин в графе вторичной топологии. Поскольку разность между оценкой (32) сверху $\lambda_{\max}[\mathcal{L}_{\Delta x}]$ и предельным значением при $\Delta x \rightarrow 0$ находится в пределах

$$\frac{1}{2} \leq \Delta(\Gamma) + 2 - \frac{\Delta^2(\Gamma)}{\Delta(\Gamma) - 1} = \frac{\Delta(\Gamma) - 2}{\Delta(\Gamma) - 1} \leq 1,$$

полученные выше данные о поведении спектра фактически подтверждают, что существенно улучшить оценку (32) сверху для максимального собственного числа матрицы Лапласа вторичной топологии невозможно.

Выводы и направления дальнейших исследований

В работе приведены и доказаны утверждения 1 и 2, характеризующие расположение точек на вещественной оси к которым стремятся собственные

значения различных спектров графа вторичной топологии $\Gamma_{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow \infty$. Задача определения зависимости между значением Δx и величиной отклонения собственных значений от этих предельных точек оказалась достаточно ёмкой и в полной мере в текущем исследовании не была решена. Тем не менее, был получен ряд важных результатов в данном направлении для спектра матрицы Лапласа равносторонней звезды. В частности, автором было доказано, что максимальные собственные числа $\lambda_{\max}[\mathcal{L}_{\Delta x}]$ матриц Лапласа равносторонних m -звезд $S_{m,n}$ образуют убывающую с ростом n последовательность, а также были построены оценки для $\lambda_{\max}[\mathcal{L}_{\Delta x}]$ равносторонней звезды $S_{m,n}$ (см. теорему 4).

Ссылки

1. Цветкович Д. Спектры графов : Теория и применение / Д. Цветкович, М. Дуб, Х. Захс; пер. В. В. Строка; под ред. В.С. Корольюк. — К.: Наукова думка. Ред. физ.-мат. лит., 1984. — 384 с. — Библиогр.: С. 338–372.
2. Doob, M. Spectral Graph Theory [Text] / Michael Doob // Gross, J. Handbook of Graph Theory / Jonathan Gross, Jay Yellen. — 1st ed. — Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2003. — Vol. 25 of Discrete Mathematics and Its Applications. — P. 1–2.
3. Mohar, B. The Laplacian spectrum of graphs [Text] / Bojan Mohar // Graph Theory, Combinatorics, and Applications / Ed. by Yousef Alavi, G. Chartrand, Ortrud R. Oellermann, A. J. Schwenk. — New York: John Wiley & Sons, 1991. — P. 871–898.
4. Neuman, M. W. The Laplacian Spectrum of Graphs [Text]: diploma thesis / University of Manitoba. — Winnipeg, 2000. — 126 p.
5. Pan, Y. L. Sharp upper bounds for the Laplacian graph eigenvalues / Yong Liang Pan // Linear Algebra and its Applications. — 2002. — Vol. 355, no. 1. — P. 287–295. — ISSN 0024-3795.
6. Li, J. S. Upper bounds for the Laplacian graph eigenvalues / Jiong Sheng Li, Yong Liang Pan // Acta Mathematica Sinica. — 2004. — Vol. 20, no. 5. — P. 803–806. — ISSN 1439-8516.
7. Lu, M. Bounds of Laplacian spectrum of graphs based on the domination number / Mei Lu, Huiqing Liu, Feng Tian // Linear Algebra and its Applications. — 2005. — Vol. 402, no. 1. — P. 390–396.
8. Гоголенко С. Ю. Характеристические полиномы и спектры симметричных матриц на графах вторичных топологий / С. Ю. Гоголенко // Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія: Проблеми моделювання та автоматизації проектування (МАП-2010). — 2010. — Т. 8, № 168. — С. 118–132.
9. Mason, J. C. Chebyshev polynomials [Text] / John C. Mason, David Christopher Handscomb. — Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2003. — 335 p. — ISBN 0849303559.

Надійшла до редакції 23.11.2010

Рецензент: доц. Краснік М.Ю.

С. Ю. Гоголенко

Донецький національний технічний університет

Алгебраїко-аналітичні властивості графів вторинної топології. У роботі розглядаються властивості різних спектрів різницевих сіток на геометричних графах.

Виводяться співвідношення, що характеризують спектри при нескінченному зменшенні кроку дискретизації. У ході вивчення поведінки спектру при зменшенні кроку дискретизації будується гіпотеза про характер залежності між найбільшими власними числами матриці Лапласа, кроком дискретизації і властивостями геометричного графу, ця гіпотеза доводиться для випадку графа-зірки. Результати порівнюються з декількома добре відомими оцінками для найбільшого власного числа матриці Лапласа довільного графа, отриманими Фідлером, Андерсоном і Морлі, Лі й Чаном.

граф вторинної топології, спектр графа, матриця суміжності, матриця Лапласа

S. Y. Gogolenko

Donetsk National Technical University

Algebraic and Analytic Properties of Meshes on Metric Graphs. The paper deals with the properties of different spectra of meshes on metric graphs. We deduce the relations that characterize the spectra of meshes if discretization step decreases indefinitely. We present a hypothesis about relation between the largest Laplacian mesh eigenvalues, discretization step and the properties of metric graph, and prove it for the star graph. Finally we compare our results with several well-known bounds for the maximum Laplacian graph eigenvalue, obtained by Fiedler, Anderson and Morley, Li and Zhang.

meshes on metric graphs, spectra of graph, adjacency matrix, Laplacian matrix