УДК 681.3

А.П. Коноплева (аспирант)
Донецкий национальный технический университет
anna.konoplyova@gmail.com

СПОСОБЫ ФОРМАЛЬНОГО ОПИСАНИЯ КЛАССИЧЕСКИХ И ПОСТБИНАРНЫХ КЛЕТОЧНЫХ АВТОМАТОВ

В статье рассмотрены примеры структурных схем клеточных автоматов (КА), описан синтез абстрактного КА методом конечных автоматов, на основе анализа существующих способов описания КА предложены способы описания постбинарных КА (ПКА).

постбинарные клеточные автоматы, алгоритмическое, графическое описание, фрагментарная таблица истинности

Вступление

Клеточные автоматы на сегодняшний день являются одним из перспективных направлений исследований в компьютерных науках. КА широко применяются для моделирования систем, для которых существенным является пространственное взаимодействие между элементами системы. Широко используются для изучения общих феноменологических аспектов окружающего мира, включая коммуникации, вычисления, конструирование, рост, репродукцию, конкуренцию и эволюцию, также с помощью КА возможно моделирование не только феноменологических аспектов, но и самих законов физики, биологии и других наук [1,2].

В работах [3-6] авторами был предложен метод моделирования КА на основе гиперлогики и гиперкодов, рассмотрены примеры использования гиперкодов в моделировании КА [3], предложена идея использовать топологические маски в моделировании КА на основе гиперлогики [4], введено новое понятие – постбинарный клеточный автомат (ПКА) [5-6], проведена оценка производительности ПКА [5], на основе исследования различных классов КА было разработано несколько новых классификаций КА [6].

На данном этапе исследований была поставлена задача поиска способов формального описания и синтеза КА и ПКА, как математических моделей или абстрактных автоматов и оценка возможности такого синтеза для двумерного КА и ПКА.

Структурная схема клеточного автомата

В работе [1] КА рассматривается как упорядоченная четверка компонент (2):

$$C = \left\langle Z^d, A, \tau^n, X \right\rangle \quad (2)$$

где Z^d – однородное пространство структуры, размерностью d; A – алфавит внутренних состояний, X – индекс соседства, который служит для определения соседей для любого единичного автомата структуры, τ^n – локальная функция переходов, которая задает правила поведения каждому автомату структуры в момент времени t на основе состояний всех соседних ему автоматов (вектор соседства X).

В каждую точку пространства Z^d помещается копия конечного автомата Мура (АМ), алфавит внутренних состояний которого есть A. Состояние S_t АМ в момент t>0 есть некоторая функция $F(B_1, \ldots B_n, t\text{-}1)$ его входов в момент времени (t-1); при этом, выход автомата в момент t тождественен его внутреннему S_t-состоянию и при наличии связи между автоматами их взаимодействие фрагментарно показано на рис. 1 [1].

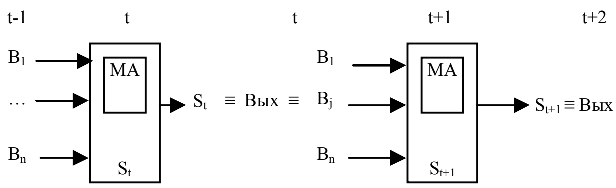

Рисунок 1 – Временная схема взаимодействия двух связных автоматов Мура [1]

В работе [7] авторами рассматриваются сети клеточных автоматов (СКА) и предлагается структурная схема КА (рис. 2). Для одномерных КА рассматривается достаточно простая структура, которая состоит из М – элементов памяти и комбинационной схемы – КС, реализующей функцию (3):

$$z_i(t+1) = f_i(z_{i-1}(t), z_i(t), z_{i+1}(t)) \quad (3)$$

где $z_{i-1}(t)$ и $z_{i+1}(t)$ – текущие состояния соседних КА, расположенных слева и справа от ячейки z_i соответственно.

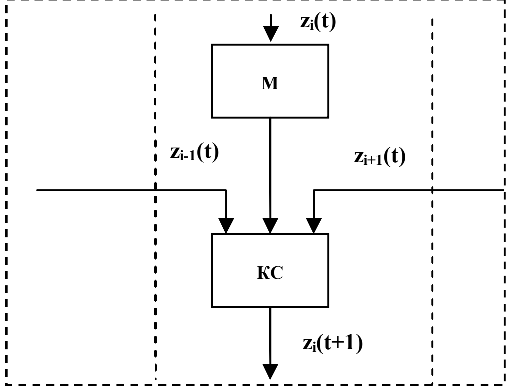

Рисунок 2 – Структурная схема клеточного автомата

В работе [7] предложена инженерная методика синтеза проверяющих тестов СКА с наблюдаемыми выходами. А в работе [8] – наглядно показано, что одномерные КА могут рассматриваться как математические модели, которые описывают самоорганизующееся поведение, а эволюция автомата может описываться как вычислительный процесс, а также разработан метод анализа поведения КА, на основе которого был построен детерминированный конечный автомат, описывающий поведение КА.

Синтез клеточного автомата. Построение графа КА

В работе [9] под синтезом абстрактных автоматов предлагается считать задание закона функционирования автомата. При этом метод синтеза заключается в следующем:

1. Формирование таблицы истинности комбинационной схемы, выполняющей аналогичную обработку параллельной информации.
2. Формирование входного и выходного алфавита.
3. Формирование графа автомата.

В рамках этой статьи предлагается рассмотреть синтез абстрактного КА, количество соседей каждой клетки у которого составляет 3, а правила перехода КА подобны правилам КА Конвея:

- пустая (мёртвая) клетка, рядом с которой ровно две живые клетки, оживает;
- если у живой клетки есть одна или две живые соседки, то эта клетка продолжает жить; в противном случае (если соседей меньше одной или больше двух) клетка умирает (от «одиночества» или от «перенаселённости»).

Построим таблицу истинности для одной ячейки такого КА.

Шаблон соседства данного автомата может выглядеть следующим образом:

	$Z_0(t)$	
$Z_1(t)$	$Z_2(t)$	$Z_3(t)$

Рисунок 3 — Шаблон соседства рассматриваемого КА

Таблица 1. Таблица истинности, описывающая поведение КА

$z_1(t)$	$Z_2(t)$	$z_3(t)$	$z_0(t+1)$
0	0	0	0
0	0	1	*
0	1	0	*
0	1	1	1
1	0	0	*
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Символ (*) показывает, что состояние $z_0(t+1)$ может принимать любое из возможных значений, 0 или 1. Если $z_0(t)=0$, то $z_0(t+1)=0$, если же $z_0(t)=1$, то и $z_0(t+1)=1$, это следует из правил КА.
Из таблицы 1 видно, что все возможные сочетания состояний соседей КА могут быть заданы в виде множества {000,001,010,011,100,101,110,111}. Определим как входной алфавит конечного автомата V={000,001,010,011,100,101,110,111}. Для удобства введем обозначения: $x_1=000$, $x_2=001$, $x_3=010$, $x_4=011$, $x_5=100$, $x_6=101$, $x_7=110$, $x_8=111$.

Так как рассматриваемый автомат имеет 2 состояния, то $Q=\{q_0,q_1\}$, где $q_0=0$, $q_1=1$.

Функция переходов конечного автомата задается соотношением:

$$\sigma(q,a)=\{r : q \rightarrow_a r\} \tag{4}$$

то есть значение функции переходов на упорядоченной паре (состояние, входной символ) есть множество всех состояний, в которые из данного состояния возможен переход по данному входному символу.

Следовательно, система команд для рассматриваемого клеточного автомата может быть представлена в виде следующих функциональных зависимостей:

$\sigma_1(q_0,x_1)=q_0$, $\sigma_2(q_0,x_2)=q_0$, $\sigma_3(q_0,x_3)=q_0$, $\sigma_4(q_0,x_4)=q_1$, $\sigma_5(q_0,x_5)=q_0$, $\sigma_6(q_0,x_6)=q_1$, $\sigma_7(q_0,x_7)=q_1$, $\sigma_8(q_0,x_8)=q_0$,
$\sigma_9(q_1,x_1)=q_0$, $\sigma_{10}(q_1,x_2)=q_1$, $\sigma_{11}(q_1,x_3)=q_1$, $\sigma_{12}(q_1,x_4)=q_1$, $\sigma_{13}(q_1,x_5)=q_1$ $\sigma_{14}(q_1,x_6)=q_1$, $\sigma_{15}(q_1,x_7)=q_1$, $\sigma_{16}(q_1,x_8)=q_0$.

Тогда граф такого конечного автомата будет иметь следующий вид:

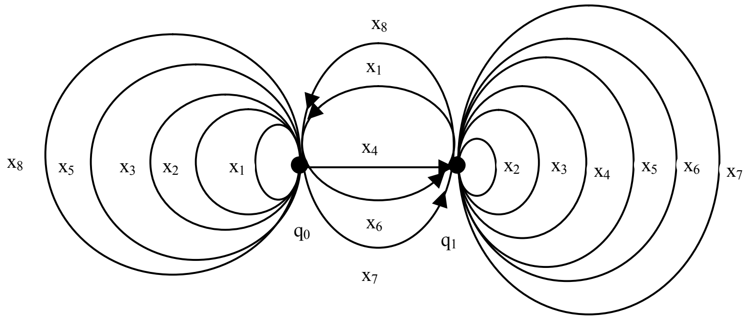

Рисунок 4 – Граф конечного автомата, отражающий поведение КА

Обозначим алфавит W как выходной алфавит конечного автомата. Символами выходного алфавита будут 0 и 1. Функция выходов автомата будет иметь следующий вид:

$\mu_1(q_0,x_1)=0$, $\mu_2(q_0,x_2)=0$, $\mu_3(q_0,x_3)=0$, $\mu_4(q_0,x_4)=0$, $\mu_5(q_0,x_5)=0$, $\mu_6(q_0,x_6)=1$, $\mu_7(q_0,x_7)=1$, $\mu_8(q_0,x_8)=0$
$\mu_9(q_1,x_1)=0$, $\mu_{10}(q_1,x_2)=1$, $\mu_{11}(q_1,x_3)=1$, $\mu_{12}(q_1,x_4)=1$, $\mu_{13}(q_1,x_5)=1$ $\sigma_{14}(q_1,x_6)=q_1$, $\mu_{15}(q_1,x_7)=1$, $\mu_{16}(q_1,x_8)=0$.

Таким образом, опытным путем, доказана возможность синтеза КА методом конечных автоматов.

Оценка возможности синтеза двумерного КА и ПКА

Рассмотрим возможность синтеза двумерного КА Конвея. Шаблон соседства Мура, используемый в этом КА выглядит следующим образом:

(-1,-1)	(0,1)	(1,1)
(-1,0)	(0,0)	(1,0)
(-1,-1)	(0,11)	(1,-1)

Рисунок 5 – Шаблон соседства Мура

Количество соседей для каждой клетки в этом автомате будет равно 8. Каждый сосед может находиться в одном из 2 состояния (0 или 1). Алфавит внутренних состояний включает 256 возможных сочетаний состояний соседей. Таблица истинности такого автомата состоит из 256 строк. Синтез этого КА вручную представляет из себя трудоемкую задачу, но вполне решаемую. Граф такого автомата будет включать 2 вершины и 256 ребер, с большим числом обратных связей.

Для ПКА задача такого синтеза является еще более сложной. Каждый сосед может находиться в одном из 4 состояний: 0, 1, A, M [3-6]. Следовательно, алфавит внутренних состояний соседей (все возможные сочетания состояний соседей) будет включать 65 536 значений. Таблица истинности будет состоять из 65536 строк, а граф переход будет иметь не менее 65536 ребер. Уже поиск самого способа отображения такого графа является задачей нетривиальной.

Кроме того для ПКА существенно усложняется процесс составления таблицы истинности, поскольку в алгоритме работы предусмотрены параллелизм (клетка и все ее соседи выздоравливают, если среди соседей есть хоть одна суперклетка, если же в окрестности есть хоть одна больная (и при этом нет суперклетки), клетка и все ее соседи заболевают) и элемент случайности. Подробно правила такого ПКА изложены в работах [3-6]. Например, пусть i клетка в момент времени t находится в состоянии A (клетка слабая), а состояния восьми соседей в момент времени t – A, A, A, 0, M, 0, 1, M, в момент времени t+1 не только i клетка переключится в 1, но и все ее соседи параллельно должны переключится в 1. Таблица истинности для метода конечных автоматов рассматривает момент перехода только для i клетки, тогда как для ПКА такой подход не является корректным.

Способы описания правил КА и ПКА

Из вышесказанного можно сделать выводы о том, что правила КА можно описать 4-м способами:

1) вербально;

2) алгоритмически (формально);
3) с помощью таблиц истинности;
4) графически;

Вербальные правила работы одного вида ПКА приведены в работе [3]. Они довольно громоздкие и не наглядные, в связи с чем требуются более емкие и содержательные способы описания.

Для алгоритмического описания правил КА Конвея может быть предложен способ, описанный далее. Обозначим рассматриваемую ячейку в момент времени t $a_0(t)$, а ее соседей $a_к(t)$, где к=1,2,…8. Тогда правила поведения ячейки:

$$a_0(t+1)=\begin{cases} 1, & \text{если} \quad (a_k(t)=0)\,\&\,(\sum_{k=1}^{8}a_k(t)=3) \\ 0, & \text{если} \quad (a_k(t)=1)\,\&\,((\sum_{k=1}^{8}a_k(t)<2)\vee(\sum_{k=1}^{8}a_k(t)>3)) \end{cases}$$

Дадим формальное описание ПКА. Постбинарный клеточный автомат представляет из себя четверку компонент:

$$PC=\left\langle Z^d,T,\sigma^n,X\right\rangle \qquad (2)$$

где Z^d – однородное пространство структуры размерностью d, в которой она функционирует; T – алфавит внутренних состояний, каждое из которых представляет из себя элемент гиперкода (в нашем случае тетракода); X – индекс соседства, который служит для определения соседей для любого единичного автомата структуры; σ^n – локальная функция переходов, которая задает правила поведения каждому автомату структуры в момент времени t на основе состояний всех соседних ему автоматов (вектор соседства X) и основана на гиперлогике (в нашем случае тетралогике).

Алгоритмически правила переходов ПКА можно описать следующим образом:

$$a_0(t+1)=\begin{cases} 0,if\left((2>\underset{k=1}{\overset{8}{Num}}(a_k(t))>3)\vee((2\le\underset{k=1}{\overset{8}{Num}}(a_k(t))\le3)\,\&\,(\forall a_k(t)\in X1,a_k(t)=A\right) \\ 1,if\left(\sum_{k=1}^{8}a_k(t)=3\right) \\ M,if\left((\underset{k=1}{\overset{8}{Num}}(a_k(t))=3)\,\&\,(\underset{k=1}{\overset{8}{Num}}\{\forall a_k(t)\in X1|a_k(t)=M\}=1)\right) \\ A,if\left((\underset{k=1}{\overset{8}{Num}}(a_k(t))=3)\,\&\,(\underset{k=1}{\overset{8}{Num}}\{\forall a_k(t)\in X1|a_k(t)=M\}=0)\,\&\,(\underset{k=1}{\overset{8}{Num}}\{\forall a_k(t)\in X1|a_k(t)=A\}\ge1)\right) \end{cases}$$

Num – операция подсчета количества элементов множества. Состояния A и M подробно описаны в работах [3-6]. X1 – подмножество, которое включает все ненулевые значения множества X (т.е. значения 1, A, M).

Такая форма описания ПКА на первый взгляд кажется громоздкой и неудобной для восприятия. Однако именно такое описание правил ПКА является наиболее полным и точным.

Таблица истинности для столь разветвленного алгоритма, состоящая из 65536 строк будет практически нечитабельна. И граф такого автомата, как уже отмечалось выше, также будет выглядеть достаточно неразборчиво, а главное, крайне неудобным для построения.

Однако, использовать граф в случае описания работы ПКА может быть очень полезным, поскольку дает визуальное представление о переходах между четырьмя состояниями.

Предлагается использовать фрагментарное отображение таблицы истинности и графа ПКА. В таблице истинности в этом случае могут быть отображены лишь ключевые переходные состояния, поясняющие работу ПКА, а на графе – соответствующие ребра.

Таблица 2 – Фрагментарная таблица истинности ПКА

$z_1(t)$	$z_2(t)$	$z_3(t)$	$z_4(t)$	$z_5(t)$	$z_6(t)$	$z_7(t)$	$z_8(t)$	$z_0(t+1)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	A	1	1	1
0	0	0	0	0	A	A	1	A
0	0	0	0	0	M	M	1	M
0	0	0	A	0	A	A	0	A

Фрагментарный граф ПКА для рассматриваемого случая может выглядеть следующим образом:

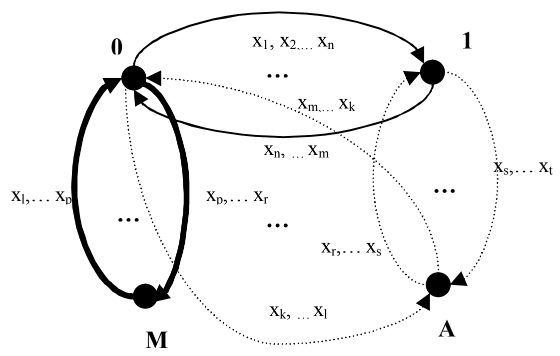

Рисунок 6 – Фрагментарный граф ПКА

На рис. 6 утолщенной линей обозначены параллельные переходы (из 0 в М и из М в 0), прерывистыми линиями – вероятностные переходы. На каждом ребре обозначены те значения входного алфавита, по которым осуществляются переходы из одного состояния в другое.

Такой граф дает наглядное представление о том, какие переходы между состояниями в данном ПКА возможны. В нашем случае нет ребер, соединяющих состояния М и А. Этот переход не предусмотрен локальными правилами перехода рассматриваемого автомата.

Выводы

В результате проведенных исследований можно сделать следующие выводы:

- математическая теория КА на сегодняшний день представляет собой достаточно хорошо развитый раздел теории абстрактных автоматов;
- в статье показана возможность синтеза КА одним из методов теории абстрактных автоматов – методом конечных автоматов;
- оценка возможности такого синтеза методом конечных автоматов для двумерного КА Конвея позволяет говорить о том, что эта задача является решаемой;
- показана ограниченность возможностей традиционных методов синтеза для ПКА из-за сложности их правил, наличия параллельных и вероятностных состояний.

В статье рассмотрены основные способы формального описания КА. Предложены способы алгоритмического, вербального, графического описания ПКА и задания правил ПКА при помощи фрагментарной таблицы истинности для ключевых переходных состояний.

Список литературы

1. Аладьев В.З. Классические однородные структуры. Теория и приложения: монография / В.З.Аладьев, В.К.Бойко, Е.А. Ровба. – Гродно : ГрГУ, 2008. – 486 с.
2. Тофоли Т. Машины клеточных автоматов / Т.Тофоли, Н.Марголус. - М.: «Мир», 1991. – 280 с.
3. Аноприенко А.Я. Опыт применения гиперкодов в моделировании клеточных автоматов / А.Я.Аноприенко, А.П. Коноплева // Научные труды Донецкого национального технического университета. Серия: Проблемы моделирования и автоматизации проектирования динамических систем. - 2007. - Вып. №6 (127). - С. 220-227.
4. Аноприенко А.Я. Развитие идеи применения гиперкодов в моделировании клеточных автоматов / А.Я.Аноприенко, А.П.Коноплева // Научные труды Донецкого национального технического университета. Серия: Информатика, кибернетика и вычислительная техника - 2008. - Вып. 93. - С. 289-316.
5. Аноприенко А.Я. Оценка производительности при моделировании постбинарных клеточных автоматов и способы ее повышения / А.Я.Аноприенко, А.П.Коноплева, А.Ю.Василенко // Научные труды Донецкого национального технического университета. Серия: Информатика, кибернетика и вычислительная техника. - 2009. - Вып. 147. - С. 96-104.
6. Аноприенко А. Я. Клеточные автоматы в историческом контексте и их классификация / А. Я.Аноприенко, А. П.Коноплева // Збірка матеріалів п'ятої

міжнародної науково-технічної конференції студентів, аспірантів та молодих науковців 2009. Серія: Інформатика та комп'ютерні технології. – 2009. – С.635-640.
7. Бережная М.А. Синтез проверяющих тестов для сетей клеточных автоматов с наблюдаемыми выходами [Электронный ресурс] / М.А. Бережная, О.Н. Замирец, Я.Ю. Королева, В.А. Лебедь. Режим доступа - http://www.nbuv.gov.ua/portal/natural/Tp/2008_2/G5.htm
8. Гормакова И.В. Вычислительные свойства сетей клеточных автоматов // Вестник национального технического университета «ХПИ». Сборник научных трудов. Тематический выпуск «Автоматика и приборостроение». Выпуск 56'2008 [Электронный ресурс] / Гормакова И.В. Режим доступа – http://library.kpi.kharkov.ua/Vestnik/2008_56.pdf
9. Баркалов А.А. Прикладная теория цифровых автоматов / А.А.Баркалов, Л.А.Титаренко. – Донецк.: ДонНТУ, Технопарк ДонНТУ УНИТЕХ, 2010. – 320 с.

Надійшла до редакції 05.11.2010 *Рецензент: канд.техн.наук, доц. Зеленьова І.Я.*

Г.П. Коноплььова
Донецький національний технічний університет

Способи формального опису класичних і постбінарних клітинних автоматів. У статті розглянуті приклади структурних схем клітинних автоматів (КА), описаний синтез абстрактного КА методом кінцевих автоматів, на основі аналізу існуючих способів опису КА запропоновані способи опису постбінарних КА (ПКА).
постбінарні клітинні автомати, алгоритмічне, графічне опис, фрагментарна таблиця істинності

A. Konoplyova
Donetsk National Technical University

Methods of Formal Description of Classical and Postbinary Cellular Automata. The article considers examples of block diagrams of cellular automata (CA), the synthesis of abstract CA by using finite automata method. Some ways for formal describing of CA are analyzed, and some ways for formal describing of postbinary CA (PCA) are considered.
postbinary cellular automaton, algorithmic, graphical description, fragmentary truth table