УДК 622.242.2+624.046.4

Ф.Л. Шевченко, д.т.н., профессор;
С.Н. Царенко, к.т.н., доцент;
Ю.В. Петтик, к.т.н., доцент
Донецкий национальный технический университет

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕТРАНСЛЯЦИОННОЙ БАШНИ

В работе рассматривается актуальная задача расчета на устойчивость башни, как пространственной стержневой системы с распределенными параметрами переменной жесткости, загруженной в верхнем сечении собственным весом или сосредоточенной силой.

Ключевые слова: *башня, устойчивость, жесткость, расчёт, сосредоточенная сила, распределенные параметры, собственный вес, напряжения.*

Ф.Л. Шевченко д.т.н, професор;
С.М. Царенко к.т.н., доцент;
Ю.В. Петтік к.т.н., доцент
Донецький національний технічний університет

СТІЙКІСТЬ РЕТРАНСЛЯЦІЙНОЇ ВЕЖІ

У роботі розглядається актуальна задача розрахунку на стійкість вежі, як просторової стрижневої системи з розподіленими параметрами перемінної жорсткості, яка завантажена у верхньому перерізі власною вагою або зосередженою силою.

Ключові слова: *вежа, стійкість, жорсткість, розрахунок, зосереджена сила, розподілені параметри, власна вага, напруги.*

F.L. Shevchenko Doctor Technical, Professor of Science;
S.N. Tsarenko Ph.D., Associate Professor;
Y.V. Pettik Jury V. Ph.D., Associate Professor
State higher education institution «Donetsk National Technical University»

STABILITY OF RELAY TOWERS

This paper considers the problem of calculating stability the tower. The tower is presented as spatial rod system with the distributed parameters of variable rigidity which is loaded in the top section a body weight tower or the concentrated force.

Keywords: *Tower, spatial rod system, distributed parameters, variable rigidity, stability the tower, force, stiffness, distributed parameters, weight.*

Вступление. Задача об устойчивости стержня постоянной жесткости от нагрузки, приложенной к верхнему сечению, и первые попытки расчета устойчивости однородного стержня, сжатого собственным весом, были выполнены еще Эйлером, а затем Лагранжем во второй половине XVIII века. В связи с появлениями пространственных стержневых систем возникла необходимость разработки расчетов на устойчивость стержней произвольного поперечного сечения. Такие задачи в конце XIX века были решены А. Гринхилом, а в начале прошлого века академик А.Н. Динник [1, 2] обратил серьезное внимание на эти задачи и привел конкретные результаты вычисления критических нагрузок для сплошных стержней переменного сечения различной конфигурации.

Обзор последних источников исследований и публикаций. Расчёты устойчивости пространственных стержневых конструкций на воздействие внешних сосредоточенных сил приведены в работах С.П. Тимошенко [3] и А.С. Вольмира [4].

Однако до сих пор не получили должного развития расчеты устойчивости стержневых систем переменного сечения на совместное воздействие внешней сосредоточенной силы и собственного веса конструкции.

Поэтому задача расчета на устойчивость пространственных стержневых конструкций с распределенными параметрами с переменной жесткости, загруженной сосредоточенной силой или собственным весом, является актуальной.

Целью данной работы является разработка инженерной методики расчета на устойчивость сквозных пространственных стержневых систем переменного поперечного сечения.

Основной материал и результаты. Рассмотрим ретрансляционную башню, приведенную на рисунке 1. Прежде всего, обратим внимание на то, что в башнях линейно переменной ширины погонный вес можно считать постоянным

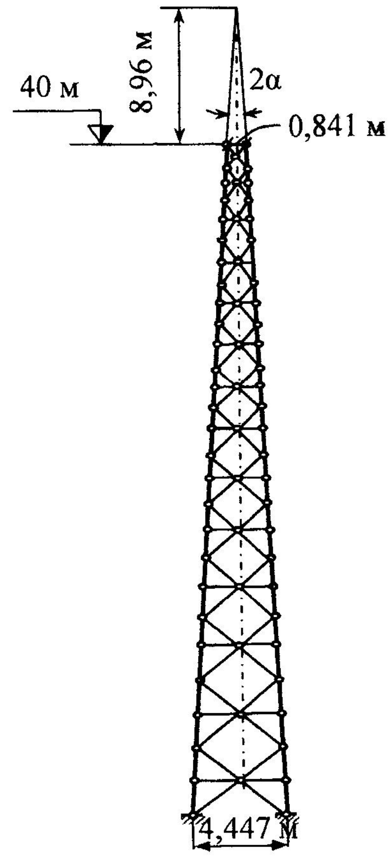

Рис. 1. Схема башни

$$q = 4\left(\frac{q_1}{\cos\alpha} + \frac{q_2}{\cos\beta} + 2q_3 \mathrm{tg}\beta\right), \tag{1}$$

где q_i – погонный вес поясов, раскосов и стоек ферм; α и β – углы наклона стержней поясов и раскосов.

Угол наклона опорных стоек, т.е. поясов ферм, представленной на рисунке 1 башни, равен $\mathrm{tg}\alpha = \frac{B\text{-}b}{2H} = \frac{4{,}447 - 0{,}814}{2 \cdot 40} = 0{,}0454$.

Расстояние до точки пересечения поясов ферм

$$h_1 = \frac{b}{2\mathrm{tg}\alpha} = \frac{0{,}814}{2 \cdot 0{,}0454} = 8{,}96 \text{ м}.$$

Опорные угловые стойки башни изготовлены из уголков 125/10 с площадью поперечного сечения $F = 24{,}5$ см^2 и погонной массой 19,1 кг/м; раскосы и поперечные стержни изготовлены из уголка 50/5 с площадью поперечного сечения 4,8 см^2 и погонной массой 3,77 кг/м. Размеры нижнего сечения башни B=444,7 см, верхнего сечения b=81,4 см, Согласно (1) погонная масса башни 3845 Н/м, которую рассчитали по аналогии, как для буровых вышках ВБ-53-320 в работе [5].

Момент инерции площади поперечного сечения у основания башни можно вычислять, пренебрегая собственными моментами инерции уголков, $J = 4F\left(\frac{B}{2}\right)^2 = 24{,}5 \cdot 444{,}7^2 = 4{,}845 \cdot 10^6$ см^4, жесткость при изгибе башни в этом сечении $EJ = 9{,}69 \cdot 10^9$ Нм^2.

В произвольном сечении на расстоянии x от точки пересечения поясов ферм $EJ(x) = EJ\frac{x^2}{l^2} = 9{,}69 \cdot 10^9 \frac{x^2}{l^2}$.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня (башни) можно получить из уравнения поперечных сил как сумму проекций всех сил, взятых с одной стороны от сечения на направление сечения (рис. 2), т.е. направление нормали к изогнутой оси под углом θ, т.е. $Q(x) = -qx$.

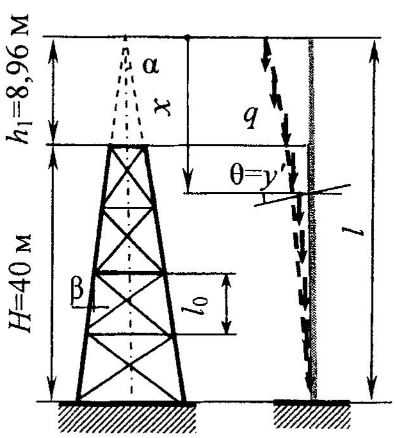

Рис. 2. К выводу дифференциального уравнения изгиба оси башни

С учётом переменного момента инерции площади поперечного сечения с жесткостью $EJ(x) = EJx^2/l^2$, такое уравнение можно получить на основании теоремы Журавского

$$Q(x) = \frac{dM(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(EJ\frac{x^2}{l^2} \cdot \frac{d^2y(x)}{dx^2}\right) = EJ\frac{x^2}{l^2} \cdot \frac{d^3y(x)}{dx^3} + EJ\frac{2x}{l^2} \cdot \frac{d^2y(x)}{dx^2}$$

, т. е.

$$EJ\frac{x^2}{l^2} \cdot \frac{d^3y(x)}{dx^3} + EJ\frac{2x}{l^2} \cdot \frac{d^2y(x)}{dx^2} = -qx. \qquad (2)$$

Полученное дифференциальное уравнение путем замены текущей координаты x безразмерной переменной $z = 2a\sqrt{x}$ можно привести к уравнению Бесселя [6, 7]

$$\frac{d^2\theta(z)}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{d\theta(z)}{dz} + \left(1 - \frac{m^2}{z^2}\right)\theta(z) = 0, \qquad (3)$$

где $z = 2a\sqrt{x} = 2\sqrt{\frac{ql^2x}{EJ}}$, m=1.

При m=1 решение уравнения (3) имеет вид

$$\theta(x)=\frac{dy(x)}{dx}=[A\cdot J_1(z)+B\cdot Y_1(z)]\cdot\sqrt{x}\ , \qquad (4)$$

где $J_1(z)$ – функция Бесселя первого рода первого порядка, $Y_1(z)$ – функция Бесселя второго рода первого порядка или функция Неймана [2], Используя формулы дифференцирования функций Бесселя

$$\frac{d}{dz}J_m(z)=-\frac{m}{z}J_m(z)+J_{m-1}(z)=\frac{m}{z}J_m(z)-J_{m+1}(z),$$

из (4) можно получить кривизну изогнутой оси башни

$$y''(x)=\frac{dy'(x)}{dx}=a\left(A\cdot J_0(z)+B\cdot Y_0(z)\right), \qquad (5)$$

где J_0 и Y_0 – функции Бесселя нулевого порядка первого и второго рода.

Расчетные уравнения (4) и (5) нужно подчинить условиям: в верхнем сечении при x=h, т.е. $z_1=2a\sqrt{x}=2\sqrt{\frac{ql^2h}{EJ}}$, изгибающий момент равен нулю и согласно (5) следует $A\cdot J_0(z_1)+B\cdot Y_0(z_1)=0$; в нижнем сечении при $x=l$, т.е. $z_2=2\sqrt{\frac{ql^3}{EJ}}$ угол поворота сечения равен нулю и согласно (4) имеем второе уравнение

$$A\cdot J_1(z_2)+B\cdot Y_1(z_2)=0.$$

Для получения ненулевых значений постоянных интегрирования определитель системы этих двух уравнений приравниваем нулю

$$J_0(z_1)\cdot Y_1(z_2)-J_1(z_2)\cdot Y_0(z_1)=0. \qquad (6)$$

Для рассматриваемой башни с жесткостью нижнего сечения $EJ=9{,}69\cdot10^9$ Нм^2, погонным весом q=3845 Н/м и координатами верхнего и нижнего сечений h=8,96 м и l=48,96 м на основании уравнения (6) находим l=165,2 м. При заданном соотношении расстояний от начала координат до верхнего и нижнего сечений получаем размеры башни в критическом состоянии H=152,0 м, с коэффициентом запаса устойчивости 3,8.

В случае пирамидальной башни условие на верхнем сечении при x=0, z=0 M=0. При нулевом значении аргумента функция $Y_0(0)=-\infty$, значит, согласно (5) постоянная B=0.

На нижнем сечении при x=l и $z_2=2\sqrt{\frac{ql^3}{EJ}}$ угол поворота равен нулю и согласно (4) $J_1(z_2)=0$. Как видно из рисунка 3, функция Бесселя первого порядка первого рода равна нулю при $z_2=3{,}83$, т.е. $2\sqrt{\frac{ql^3}{EJ}}=3{,}83$. Отсюда находим критическую длину пирамидальной башни

$$l = \sqrt[3]{z_2^2 \cdot \frac{EJ}{4 \cdot q}}. \tag{7}$$

Для конкретной башни рисунка 1 получаем

$$l = \sqrt[3]{3{,}83^2 \cdot \frac{9{,}69 \cdot 10^9}{4 \cdot 3845}} = 209{,}8 \text{ м.}$$

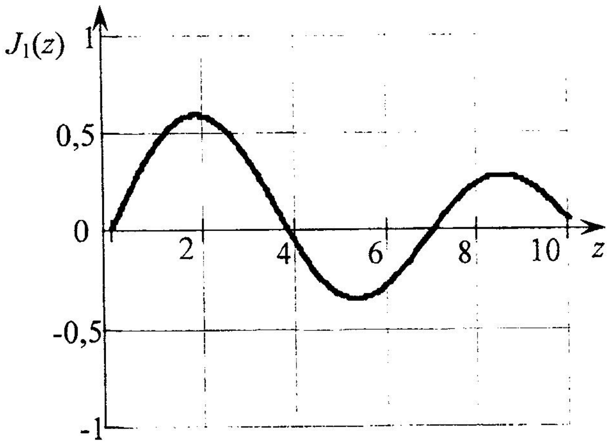

Рис. 3. График функции Бесселя $J_1(z)$

Для сплошных стержней постоянной жесткости критическая длина консоли вычисляется по формуле [8]

$$l_{кр} = \sqrt[3]{\frac{\pi^2 EJ}{\mu^2 q}}. \tag{8}$$

Приравнивая критические длины условной эквивалентной консоли (8) и сквозной башни переменного сечения (7), найдем коэффициент приведения длины эквивалентной башни

$$\sqrt[3]{\frac{\pi^2 EJ}{\mu^2 q}} = \sqrt[3]{\left(\frac{z(l)}{2}\right)^2 \frac{EJ}{q}}, \tag{9}$$

откуда получаем

$$\mu = \frac{2\pi}{z(l)} = \frac{2 \cdot \pi}{3{,}83} = 1{,}64.$$

Заметим, что для консоли постоянной жёсткости с учётом собственного веса коэффициент приведения длины μ=1,122 [5], для невесомой консоли μ=2.

Среднее значение этих двух крайних случаев μ=1,56 практически совпадает с коэффициентом приведения рассмотренной башни.

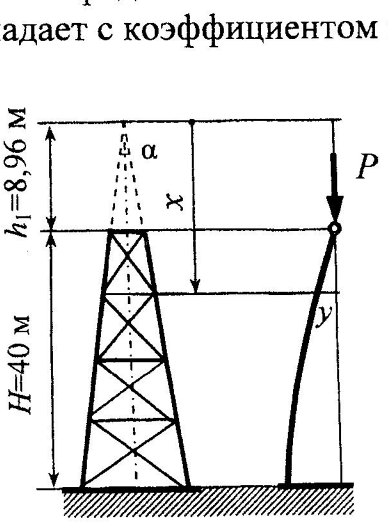

Рис. 4. Расчётная схема башни с нагрузкой Р

В работах С.П. Тимошенко [3] и А.С. Вольмира [4] приводится решение на устойчивость невесомой вышки в виде усеченной пирамиды на воздействие сосредоточенной силы в верхнем сечении.

Расчет основан на приближенном дифференциальном уравнении изогнутой оси стержня второго порядка при выборе начала координат в точке пересечения угловых несущих стержней башни (рис. 4)

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} EJ\left(\frac{x}{l}\right)^2 + P_{кр} y = 0. \tag{10}$$

При обозначении $\frac{P_{кр}}{EJ} = k^2$ это уравнение принимает вид обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с постоянным коэффициентом k

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + k^2x^{-2}y = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$y(x) = (A\sin(s \cdot \ln x) + B\cos(s \cdot \ln x))\sqrt{x}, \qquad (11)$$

где

$$s^2 = k^2 - 0{,}25. \qquad (12)$$

Дифференцированием (11) получено уравнение углов поворота сечений стержня

$$\frac{dy(x)}{dx} = A\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin(s\ln x) + \frac{s}{\sqrt{x}}\cos(s\ln x)\right) + B\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos(s\ln x) - \frac{s}{\sqrt{x}}\sin(s\ln x)\right). \qquad (13)$$

При выборе начала координат в точке пересечения осей угловых стержней башни в деформированном состоянии из условия $x = h$ прогиб равен нулю, согласно (11) получена зависимость

$$B = -A\mathrm{tg}\left(s\ln\frac{h}{l}\right).$$

Из условия защемления нижнего сечения, при $x = h + H = l$ угол поворота равен нулю, в соответствии с (13) получаем зависимость

$$A\left(\frac{1}{2}\mathrm{tg}(\mathrm{s}\ln l) + \mathrm{s}\right) + B\left(\frac{1}{2} - \mathrm{s} \cdot \mathrm{tg}(\mathrm{s}\ln l)\right) = 0,$$

откуда следует расчетное уравнение для определения параметра s

$$\mathrm{tg}\left(s\ln\frac{h}{l}\right) = 2s. \qquad (14)$$

Зная корень этого уравнения s, находим параметр k и критическую силу

$$P_{кр} = \frac{EJ}{l^2}k^2 = \frac{EJ}{(h+H)^2}\left(s^2 + \frac{1}{4}\right). \qquad (15)$$

Подставляя в это уравнение параметры рассматриваемой башни $\frac{h}{l} = \frac{8{,}96}{48{,}96} = 0{,}183$, подбором находим s=1,164 , чему соответствует критическая сила (15)

$$P_{кр} = \frac{9{,}69 \cdot 10^9}{(8{,}96+40)^2}(1{,}164^2 + 0{,}25) = 6{,}48 \cdot 10^6\ H = 6480\ \text{кН}$$

и критическое напряжение

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \frac{6{,}48 \cdot 10^6}{4 \cdot 24{,}5 \cdot 10^{-4}} = 662 \cdot 10^6\ \text{Па}.$$

В ретрансляционных башнях нагрузка на верхней площадке незначительная, но оценку грузонесущей способности такой конструкции можно выполнить, используя работы [3, 4].

При полученном высоком напряжении, значительно превышающем предел пропорциональности, упрощенным дифференциальным уравнением, на основе которого выведены расчетные формулы, пользоваться нельзя. Конструкция башни имеет незначительную гибкость

$$\lambda = \mu\frac{l}{i} \approx 2\frac{40}{2{,}2} = 36{,}4\,.$$

При такой гибкости стальные стержни не теряют устойчивости, башню следует рассчитывать только на прочность.

Выводы

1. Пространственные стержневые конструкции башенного типа, которые используются в виде консольных сооружений (опорные вышки буровых установок, башни ретрансляторов, опоры ветровых генераторов) не теряют устойчивости от собственного веса.

2. Критическая сосредоточенная сила на верхней площадке пространственной башни значительно превышает реальные технологические нагрузки или нагрузки от оборудования, однако расчет общей устойчивости таких сооружений необходим.

3. На устойчивость нужно рассчитывать угловые опорные стержни по формуле Эйлера. При этом необходимо принимать невесомые шарнирно закрепленные стойки длиною равной панели боковых пространственных ферм l_0.

Литература

1. *Динник А.Н. Приложение функций Бесселя к задачам теории упругости. Избранные труды. – К.: АН УССР, 1955. – Том 2. – 220 с.*
2. *Динник А.Н. Продольный изгиб, кручение. Изд. АН СССР, – М. 1955. – 392 с.*
3. *Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. – М.: Наука, гл. ред. физ.- мат. лит. 1971. – 807 с.*
4. *Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, гл. ред. физ.- мат. лит. 1967. – 983 с.*
5. *Шевченко Ф.Л. Устойчивость буровых вышек башенного типа и их расчет на жесткость / Ф.Л. Шевченко, Ю.В. Петтик, С.Н. Царенко // Матеріали Міжнародної конференції «Форум гірників – 2011». – Д.: Національний гірничий університет, 2011. – С. 216 – 224.*
6. *Шевченко Ф.Л. Механика упругих деформируемых систем. Часть 1. Напряженно-деформированное состояние стержней: учеб. пособие / Ф.Л. Шевченко. – Донецк: РВВ ДонНТУ, 2006. – 293 с.*
7. *Шевченко Ф.Л. Механика упругих деформируемых систем. Часть 2. Сложное напряженное состояние: учеб. пособие. – Донецк: РВВ ДонНТУ, 2007. – 306 с.*
8. *Шевченко Ф.Л. Задачи по сопротивлению материалов: учеб. Пособие / Ф.Л. Шевченко, С.Н. Царенко. – Донецк: ТОВ «Цифрова типографія», 2007. – 343 с.*

Надійшла до редакції 20.03.2012 р.