

## НОРМИРОВАННЫЕ НА ОСНОВЕ КОМПЛЕКСНОГО КРИТЕРИЯ КАЧЕСТВА УПРАВЛЕНИЯ ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ СИСТЕМ С АСТАТИЗМОМ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Акимов Л.В., Гуль А.И.

Национальный технический университет «ХПИ»

*gull@kpi.kharkov.ua*

*Multiple-integrating systems control quality diagrams are applied to derive normalized characteristic polynomials, the systems created via solving a minimax problem of parametric optimization. In second- and third-order astaticism systems, the polynomials allow maximum stability margin with initial Q-factor or maximum Q-factor over acceleration and jerk with a preset stability margin.*

В последние годы появилось большое число публикаций, в которых для решения задач синтеза систем находят применение нормированные передаточные функции. Последние характеризуются принятыми законами распределения нулей и полюсов и используются при синтезе систем модального управления и наблюдателей состояния [1-7], при создании оптимальных [8] и вход-выход полиномиальных модальных регуляторов [9], при полиномиальном методе синтеза регуляторов для исходно-неустойчивых двухмассовых систем [10].

Нормированные передаточные функции являются базой для определения желаемой передаточной функции системы автоматического регулирования. Они определяют достижимую точность работы системы, характеризующуюся величиной ошибки воспроизведения управляющего воздействия, и физическую реализуемость регулятора. Однако, в представленном далеко не полном перечне работ, как правило, используются нормированные передаточные функции, относящиеся к системам с астатизмом  $\nu$  первого порядка по управляющему воздействию, когда полином числителя выбирается равным единице.

Если по техническим условиям система автоматического регулирования должна обладать астатизмом второго или третьего порядка, то желаемая передаточная функция и, следовательно, нормированная будут иметь соответствующее число нулей. Передаточные функции замкнутых систем при этом представляются в виде:

$$W(p^*)_{\nu=2} = \frac{b_1 p + 1}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + 1}, \quad b_1 = a_1; \quad (1)$$

$$W(p^*)_{\nu=3} = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + 1}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + 1}, \quad b_1 = a_1, \quad b_2 = a_2, \quad (2)$$

где  $n$  – порядок системы с измененным аргументом  $p$  на  $p^* = p/\Omega_0$  (в дальнейшем звездочка при  $p$  опущена);  $\Omega_0$  – среднегеометрический корень и вводимое в рассмотрение безразмерное время  $\tau = t \cdot \Omega_0$ .

Для передаточных функций (1) и (2) существуют рекомендации по расположению корней на действительной оси, обеспечивающих приемлемую величину перерегулирования  $\sigma\%$ . Для передаточной функции (1) с одним нулем рекомендовано располагать корни на вещественной оси по арифметической прогрессии [11]. Для передаточной функции (2) с двумя нулями расположение корней ведется по геометрической прогрессии [12]. В табл. 1 и 2 для систем до шестого порядка включительно приведены известные значения коэффициентов полиномов знаменателя нормированных передаточных функций (1) и (2) соответственно. Они даны в строках, отвечающих указанному порядку системы  $n$ . В таблицах указаны также величина перерегулирования  $\sigma\%$ , безразмерное время первого согласования  $\tau_{01}$  и первого максимума  $\tau_{m1}$ . Кроме того, для систем с астатизмом второго порядка дана величина добротности по ускорению  $K_e$ , а для систем с астатизмом третьего порядка – добротность по рывку  $K_p$ .

Цель исследования состоит в определении новых значений коэффициентов  $a_i$  нормированных передаточных функций (1) и (2) при использовании комплексного критерия качества управления, основанного на решении минимаксной задачи параметрической оптимизации многократно интегрирующих систем.

Минимаксная задача параметрической оптимизации, сформулированная в [13, 14], заключается в автоматическом поиске оптимального баланса добротности и запаса устойчивости. Она решается путем построения, с использованием современной компьютерной технологии, диаграмм качества управления как во временной, так и в частотной области и определении линии МДУ – максимума добротности и запаса устойчивости многократно интегрирующих систем. При этом во временной области, которая используется в дальнейшем, в качестве критерия запаса устойчивости выбирается величина перерегулирования  $\sigma\%$  переходной характеристики системы по управлению  $h(\tau)$ .

Диаграммы качества управления во временной области содержат изолинии запаса устойчивости или конкретного значения перерегулирования. При этом линия МДУ определяется как геометрическое место точек решения минимаксной задачи

$$\max_{\tau \in [0,10]} h(a_1, \tau) \rightarrow \min_{a_1 \in [2,30]} \text{ при } K_{\varepsilon} = \text{const}, \quad (3)$$

где  $K_{\varepsilon}$  – соответствующая величина добротности системы.

Особенность линии МДУ заключается в том, что при заданной (принятой) добротности на ней максимален запас устойчивости или, что тоже самое, минимально перерегулирование или при заданном перерегулировании, отвечающем соответствующей изолинии – добротность на ней максимальна.

Остановимся в начале на системах (1) с астатизмом  $\nu=2$ . На рис.1 показаны четыре рассчитанные диаграммы качества управления для систем третьего – шестого порядков. Отметим, что для системы со значениями  $n=2$  и  $\nu=2$  оптимальный баланс добротности и запаса устойчивости не достигается.

На диаграммах аргументом выбрано значение коэффициента  $a_1=b_1$  характеристического полинома передаточной функции (1), а в качестве ординаты – величина  $\xi$ , отвечающая увеличению исходной добротности системы по ускорению. Кроме того, каждой изолинии запаса устойчивости предписана величина перерегулирования в процентах. В результате решения минимаксной задачи (3) на диаграммах качества нанесена линия МДУ.

На рис.2 показаны переходные характеристики  $h(\tau)$  для систем третьего – шестого порядка с  $\nu=2$ . Индексом 1 обозначены переходные характеристики, отвечающие исходному распределению нулей и полюсов. Можно видеть, что для системы с  $n=3$  величина перерегулирования  $\sigma=9,8\%$ . Этому значению перерегулирования соответствует указанная на рис.1,а изолиния запаса устойчивости. На данной изолинии имеется характерная точка А со значением ординаты в точке В. Первая из них принадлежит линии МДУ, а вторая – оси ординат со значением коэффициента  $\xi=1$ . Точка В отвечает коэффициенту  $a_1$ .

Поскольку при известной добротности  $K_{\varepsilon} = \Omega_0^2 / a_2 = \Omega_0^2 / 5,1$ , обеспечиваемой исходным распределением, коэффициент  $\xi=1$ , то оптимальный баланс добротности и запаса устойчивости достигается при коэффициенте характеристического полинома в (1)  $a_1=10$ , а именно в точке F куда ниспадает линия МДУ. Отвечающие этому случаю найденные величины коэффициентов  $a_i$  указаны в строке табл.1 с индексом  $3^{\sigma}$ , а соответствующая им переходная характеристика приведена на рис.1,а под номером 2. Данная характеристика имеет перерегулирование  $\sigma=6,26\%$ .

Анализ точки А показывает, что ей отвечает ордината со значением  $\xi_1=1,875$ . Другими словами, в данной системе при первоначально известном перерегулировании  $\sigma=9,8\%$  возможно увеличение до оптимального значения добротности по ускорению, т.е. в 1,875 раз.

Таблица 1 – Коэффициенты нормированных передаточных функций систем с астатизмом второго порядка при  $n=2-6$

n	Коэффициенты							$\sigma\%$	$K_{\varepsilon}$	$\xi_i$	$\tau_{01}$	$\tau_{m1}$
	$a_6$	$a_5$	$a_4$	$a_3$	$a_2$	$a_1$	$a_0$					
2					1	2,5	1	9,9	$\Omega_0^2$	1	0,9	1,9
3				1	5,1	6,35	1	9,8	$\Omega_0^2 / 5,1$	1	1,65	3,18
$3^{\sigma}$				1	5,1	10	1	6,26		1	1,12	1,76
$3^{\xi}$				0,533	2,72	6,25	1	9,8	$\Omega_0^2 / 2,72$	1,875	0,88	1,35
$3^{20}$				0,163	0,83	2,79	1	20	$\Omega_0^2 / 0,83$	6,12	0,6	0,95
4			1	7,22	16,3	11,83	1	9,7	$\Omega_0^2 / 16,3$	1	2,64	5,5
$4^{\sigma}$			1	7,22	16,3	14,4	1	8,1		1	2,21	3,66
$4^{\xi}$			0,833	6,02	13,58	11,5	1	9,7	$\Omega_0^2 / 13,58$	1,2	2,19	4,0
$4^{20}$			0,312	2,26	5,09	5,73	1	20	$\Omega_0^2 / 5,09$	3,2	1,54	2,5
5		1	9	29	38	18	1	10,2	$\Omega_0^2 / 38$	1	3,86	6,44
$5^{\sigma}$		1	9	29	38	20,5	1	9,25		1	3,39	5,36
$5^{\xi}$		0,92	8,31	26,78	35,08	18,5	1	10,2	$\Omega_0^2 / 35,08$	1,083	3,4	6,0
$5^{20}$		0,39	3,49	11,24	14,73	9,25	1	20	$\Omega_0^2 / 14,73$	2,58	2,67	4,32
6	1	11	45,8	92,3	82,3	27,7	1	9,58	$\Omega_0^2 / 82,3$	1	5,38	9,0
$6^{\sigma}$	1	11	45,8	92,3	82,3	30,7	1	8,9		1	4,83	7,63
$6^{\xi}$	0,92	10,16	42,3	85,2	76	27,7	1	9,58	$\Omega_0^2 / 76$	1,083	4,91	8,0
$6^{20}$	0,39	4,26	17,75	35,78	31,9	13,15	1	20	$\Omega_0^2 / 31,9$	2,58	3,9	6,33

Таблица 2 – Коэффициенты нормированных передаточных функций систем с астатизмом третьего порядка при  $n=3-6$

$n$	Коэффициенты							$\sigma\%$	$K_p$	$\xi_1$	$a$	$\tau_{01}$	$\tau_{m1}$
	$a_6$	$a_5$	$a_4$	$a_3$	$a_2$	$a_1$	$a_0$						
3				1	6,7	6,7	1	10	$\Omega_0^3$	1	–	0,35	0,76
4			1	7,9	15	7,9	1	20,9	$\Omega_0^3 / 7,9$	1	–	0,9	1,8
4 $^\sigma$			1	7,9	30	10,96	1	13,9		1	5,48	0,55	0,85
4 $^\xi$			0,29	2,3	10,56	6,5	1	20,9	$\Omega_0^3 / 2,3$	3,44	3,25	0,43	0,75
4 $^{25}$			0,165	1,3	6,81	5,22	1	25	$\Omega_0^3 / 1,3$	6,08	2,61	0,35	0,65
5		1	18	69	69	18	1	20	$\Omega_0^3 / 69$	1	–	1,65	3,4
5 $^\sigma$		1	18	69	112,4	21,2	1	13,2		1	10,6	1,25	2,05
5 $^\xi$		0,36	6,4	24,55	47,33	13,76	1	20	$\Omega_0^3 / 24,55$	2,81	6,88	0,95	1,55
5 $^{25}$		0,197	3,56	13,64	27,35	10,46	1	25	$\Omega_0^3 / 13,64$	5,06	5,23	0,9	1,5
6	1	36	251	485	251	26	1	16,2	$\Omega_0^3 / 485$	1	–	3,4	7,2
6 $^\sigma$	1	36	251	485	408	40,4	1	13,7		1	20,2	2,1	3,5
6 $^\xi$	0,62	22,29	155,4	300	263,7	32,48	1	16,2	$\Omega_0^3 / 300$	1,615	16,24	2,0	3,3
6 $^{25}$	0,22	8,07	56,28	108,7	108	20,78	1	25	$\Omega_0^3 / 108,7$	4,46	10,39	1,8	2,9

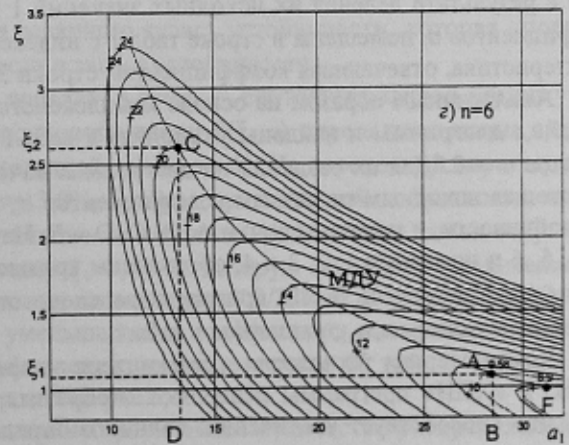
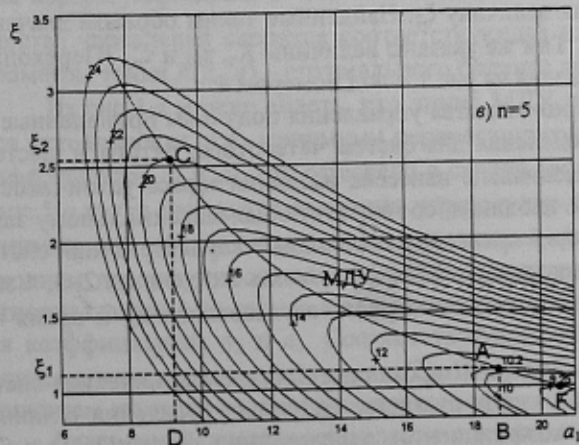
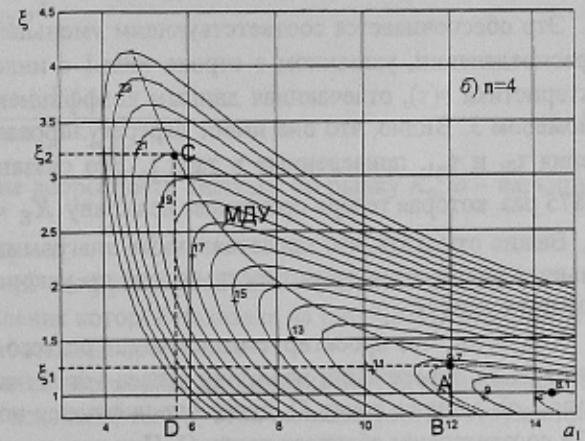
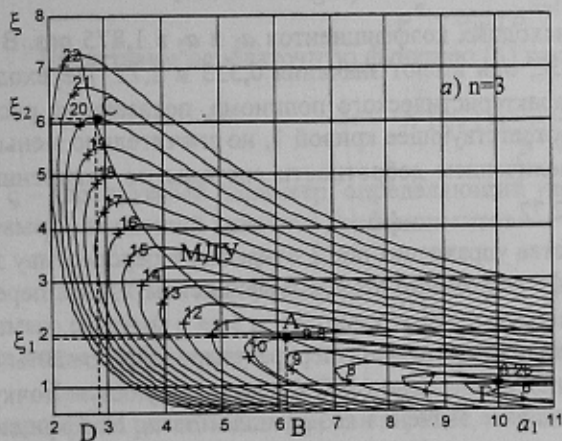


Рисунок 1 – Диаграммы качества управления систем с астатизмом второго порядка при  $n=3-6$

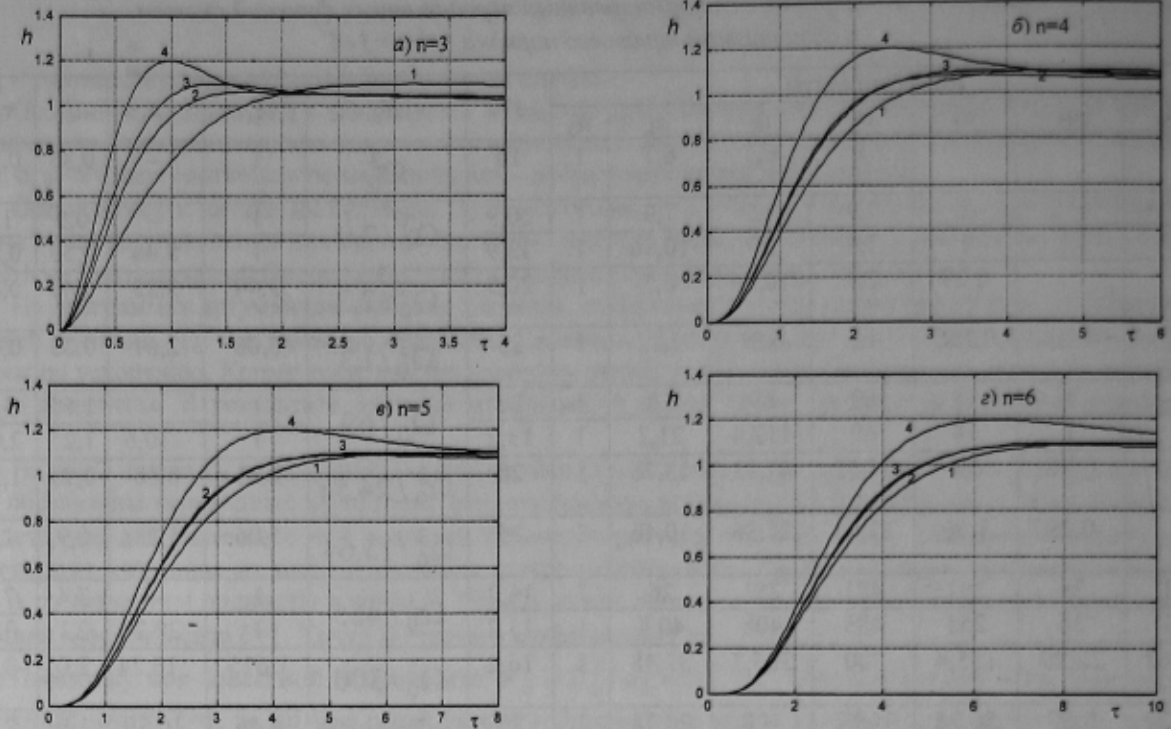


Рисунок 2 – Переходные характеристики систем с астатизмом второго порядка при  $n=3 \div 6$ , соответствующие: 1 – исходному распределению ( $n$ ); 2 – минимуму перерегулирования при исходной добротности по ускорению ( $n^0$ ); 3 – максимуму добротности по ускорению при исходном запасе устойчивости ( $n^5$ ); 4 – максимуму добротности по ускорению при заданном запасе устойчивости  $\sigma=20\%$  ( $n^{20}$ )

Это обеспечивается соответствующим уменьшением исходных коэффициентов  $a_3$  и  $a_2$  в 1,875 раз. В новом распределении, указанном в строке табл.1 с индексом  $3\xi_1$ , они имеют значения 0,533 и 2,72. Переходная характеристика  $h(\tau)$ , отвечающая данным коэффициентам характеристического полинома, показана на рис.1,а под номером 3. Видно, что она имеет перерегулирование, соответствующее кривой 1, но значительно меньшие значения  $\tau_{01}$  и  $\tau_{m1}$ , приведенные в табл.1. Это связано с увеличением добротности системы по ускорению в  $\xi_1=1,875$  раз, которая теперь принимает величину  $K_E = \Omega_0^2 / 2,72$ .

Важно отметить, что представленные диаграммы качества управления рис.1 открывают перспективу значительного увеличения добротности систем по ускорению, формируя при этом коэффициенты  $a_i$  и  $b_i$  передаточной функции (1).

Допустим, что проектируемая система третьего порядка с  $v=2$  допускает перерегулирование  $\sigma=20\%$ . Тогда, находя на пересечении изолинии запаса устойчивости с  $\sigma=20\%$  и линии МДУ соответствующую точку С (см. рис.1,а), а также точку D, легко определяются нормированные значения коэффициентов  $a_i$ . Коэффициент  $a_1=2,79$  соответствует абсциссе точки D. При известной ординате точки С ( $\xi_2=6,12$ ) коэффициенты  $a_3$  и  $a_2$  находятся в результате деления их исходных значений 1 и 5,1 на величину  $\xi_2$ . Найденные таким образом значения коэффициентов  $a_i$  помещены в строке табл.1 с индексом  $3^{20}$ . Там же указаны величины  $K_E$ ,  $\tau_{01}$  и  $\tau_{m1}$ . Переходная характеристика, отвечающая коэффициентам строки  $3^{20}$ , показана на рис.1,а под номером 4.

Аналогичным образом на основе комплексного критерия качества управления получены приведенные на рис.1,б,в,г диаграммы и найдены указанные в табл.1 распределения для систем четвертого, пятого и шестого порядков с  $v=2$ . Для их создания на диаграммах качества специально нанесена изолиния запаса устойчивости, отвечающая исходным значениям коэффициентов  $a_i$ , а также изолиния, соответствующая максимальному запасу устойчивости, и показаны точки А, В, С, D и F. На рис.2,б,в,г приведены переходные характеристики систем с  $n=4, 5, 6$  и номерами 1, 2, 3 и 4, обозначены кривые, отвечающие исходным 1 и вновь найденным 2, 3, 4 значениям коэффициентов  $a_i$ . По кривым определено относительное время первого согласования  $\tau_{01}$  и время наступления максимума  $\tau_{m1}$ , указанное в табл.1.

Компьютерная технология и имеющиеся на кафедре «Автоматизированные электромеханические системы» НТУ «ХПИ» программы позволяют отобразить любой участок диаграмм качества управления с линией МДУ, что способствует увеличению точности определения коэффициентов передаточных функций (1) и (2). Фрагмент такой диаграммы показан на рис.3 для системы со значениями  $n=3, v=2$ .

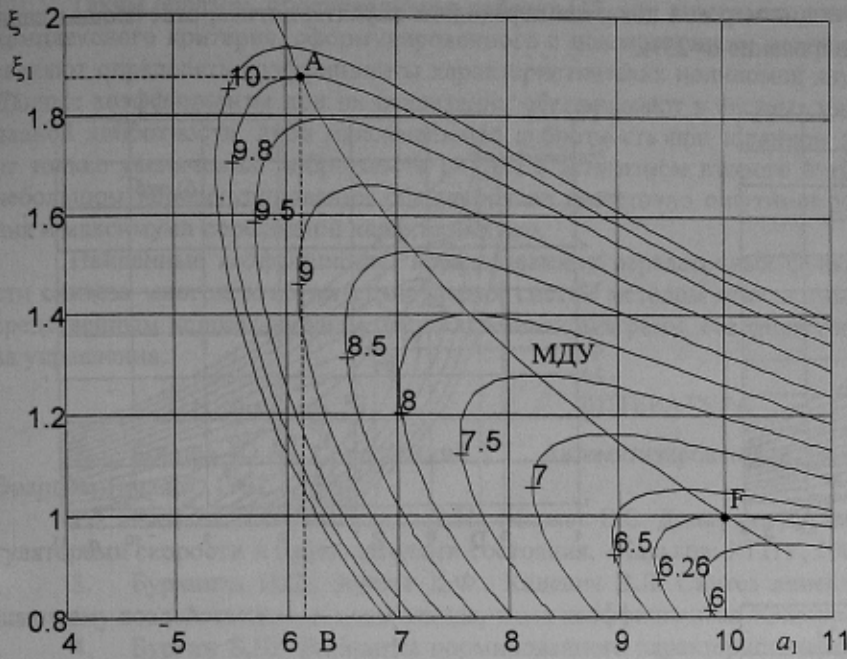


Рисунок 3 – Фрагмент диаграммы качества управления системы с  $n=3, v=2$

Перейдем к системам с астатизмом третьего порядка, которым отвечает передаточная функция (2). Известные коэффициенты характеристического полинома данных систем [12] под индексом  $n=3, 4, 5, 6$  приведены в табл.2. Как и ранее отметим, что оптимальный баланс добротности и запаса устойчивости не достигается в системе с  $n=3$  и  $v=3$ .

Передаточная функция данных систем в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W(p_*) = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + 1}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_3 p^3}, \quad b_2 = a_2, \quad b_1 = a_1. \quad (4)$$

Представим передаточную функцию (4) как

$$W(p_*) = \frac{\xi(ap+1)^{v-1}}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_3 p^3}, \quad (5)$$

где  $\xi$  – варьируемый параметр, определяющий увеличение добротности системы по рыбку  $K_p$ ;  $a$  – варьируемый параметр, задающий значение коэффициентов

$$a_1 = 2a; \quad a_2 = a^2. \quad (6)$$

Рассмотрим методику определения новых значений коэффициентов для передаточной функции (2) на примере системы с  $n=4$  и  $v=3$ , диаграмма качества управления которой показана на рис.4,а. На диаграмме нанесена линия МДУ, которая находится по специально разработанной программе.

Прежде всего для известного распределения строится переходная характеристика  $h(\tau)$ , приведенная под номером 1 на рис.5,а. По ней, как и ранее, определяется исходный запас устойчивости, соответствующий величине перерегулирования  $\sigma=20,9\%$ . Находится также добротность по рыбку  $K_p = \Omega_0^3 / 7,9$ . Далее на диаграмме качества управления строится соответствующая изолиния заданного запаса устойчивости, которая определяет параметры точки  $A(\xi, a)$  – оптимального баланса добротности и запаса устойчивости.

Из рис.4,а можно видеть, что линия МДУ при  $\xi=1$  попадает в точку F, соответствующую максимуму запаса устойчивости, т.е. минимуму перерегулирования. Координаты точки  $F(\xi, a)$  определяют новые значения коэффициентов  $a_1$  и  $a_2$ , что отражено в строке табл.2, отмеченной индексом 4<sup>σ</sup>. Из переходной характеристики 2 рис.5,а легко находится величина перерегулирования  $\sigma=13,9\%$ , которая при заданной добротности является минимальной, обеспечивающей максимальный запас устойчивости системы. Координаты точки  $A(\xi, a)$  при исходном перерегулировании  $\sigma=20,9\%$  определяют величину  $\xi_1=3,44$  на которую возможно увеличение добротности системы по рыбку, т.е. уменьшение коэффициента  $a_3$  до величины  $7,9/3,44=2,3$ , а также по (6) значения коэффициентов  $a_2$  и  $a_1$ . Соответствующим образом уменьшается и коэффициент  $a_4$  характеристического полинома в передаточной функции (2). Полученные коэффициенты указаны в строке 4ξ табл.2. Данным коэффициентам отвечает переходная характеристика под номером 3 на рис.5,а.

Диаграммы качества управления позволяют определять неограниченное количество распределений, если у разработчика системы имеются требования к переходным процессам и точности обработки управляющего воздействия. Так, если основным требованием является увеличение добротности по рыбку  $K_p$ , а система, например, допускает перерегулирование  $\sigma=25\%$ , то на диаграмме легко находится точка C, принадлежащая линии МДУ, а следовательно, обеспечивающая оптимальный баланс добротности и запаса устойчивости. При значениях координат этой точки  $\xi_2=6,08$  и  $a_D=2,61$  конструируются коэффициенты передаточной функции (2), ука-

занные в строке  $n^{25}$  табл.2. На рис.5,а под номером 4 показана переходная характеристика, отвечающая данному распределению, имеющая перерегулирование  $\sigma=25\%$ .

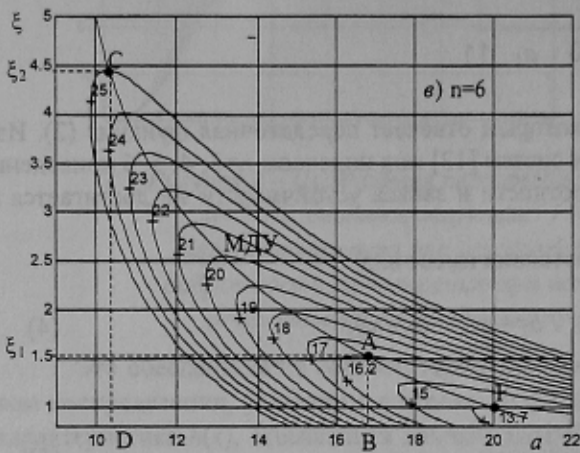
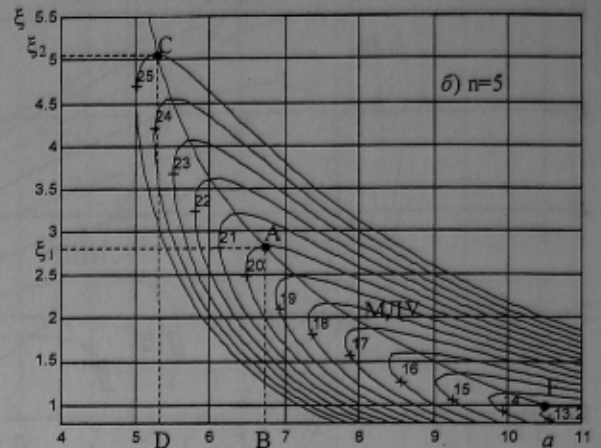
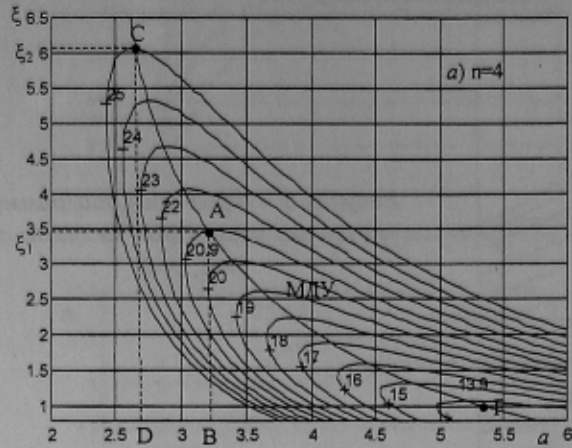


Рисунок 4 – Диаграммы качества управления систем с астатизмом третьего порядка при  $n=4 \div 6$

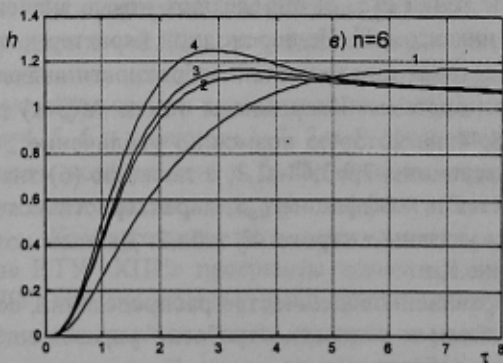
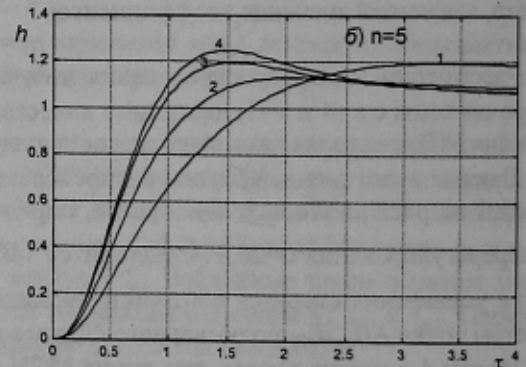
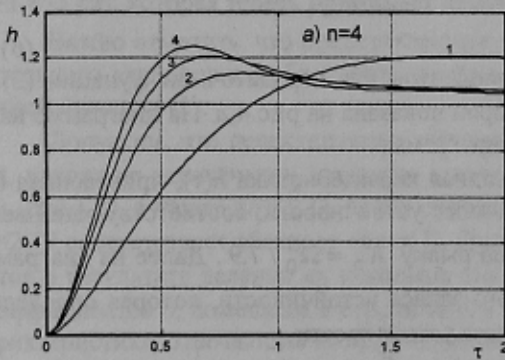


Рисунок 5 – Переходные характеристики систем с астатизмом третьего порядка при  $n=4 \div 6$ , соответствующие: 1 – исходному распределению ( $n$ ); 2 – минимуму перерегулирования при исходной добротности по рывку ( $n^0$ ); 3 – максимуму добротности по рывку при исходном запасе устойчивости ( $n^5$ ); 4 – максимуму добротности по рывку при заданном запасе устойчивости  $\sigma=25\%$  ( $n^{25}$ )

Аналогичным образом созданы коэффициенты всех других полиномов, помещенных в табл.2, а на рис.5,б,в,г показаны соответствующие им переходные характеристики.

Таким образом, обоснованные в работах [13, 14], диаграммы качества управления, полученные на основе комплексного критерия, сформулированного с использованием результатов решения минимаксной задачи, позволяют определять коэффициенты характеристических полиномов двух и трехкратно интегрирующих систем. Данные коэффициенты при их реализации обеспечивают в системе максимальный запас устойчивости при заданной добротности, либо максимальную добротность при заданном запасе устойчивости. Они способствуют не только увеличению добротности систем с астатизмом второго и третьего порядка, но и при сравнительно небольшом перерегулировании обеспечивают достаточно ощутимое уменьшение времени первого согласования и максимума переходной характеристики.

Найденные коэффициенты нормированных передаточных функций значительно расширяют возможности синтеза многократно интегрирующих систем методом стандартных переходных характеристик или непосредственным использованием представленных диаграмм, созданных на основе комплексного критерия качества управления.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Борцов Ю.А., Соколовский Г.Г. Автоматизированный электропривод с упругими связями. –СПб.: Энергоатомиздат, 1992. –288 с.
2. Акимов Л.В., Колотило В.И., Марков В.С. Динамика двухмассовых систем с нетрадиционными регуляторами скорости и наблюдателями состояния. –Харьков: ХГПУ, 2000. –91 с.
3. Буряника Н.С., Зенков Д.Ф., Кацевич В.Л. Синтез линейных систем по управляющему и возмущающему воздействиям методом стандартных коэффициентов //Электричество, 1995, №6. С.55-58.
4. Бургин Б.Ш. Варианты нормированного характеристического уравнения двухмассовой электромеханической системы //Электричество, 1993, №8. С.42-47.
5. Толочко О.И., Коцегуб П.Х., Губарь Ю.В., Федоряк Р.В. Конструирование передаточных функций линейных САУ из условия модульного оптимума //Труды Донецкого ГТУ. Серия «Электротехника и энергетика». Вып.17. –Донецк: ДГТУ, 2000. С.24-30.
6. Толочко О.И., Коцегуб П.Х., Федоряк Р.В. Дослідження впливу середньгеометричного кореня характеристичного полінома на властивості системи модального керування двомасовим електромеханічним об'єктом //Праці Донецького ДТУ. Серія «Електротехніка і енергетика». Вип.41. –Донецк: ДНТУ, 2002. С.146-155.
7. Осичев А.В., Котляров В.О., Марков В.С. Стандартные распределения корней в задачах синтеза в электроприводе //Проблемы автоматизированного электропривода. Теория и практика. –Харьков: Основа, 1997. С.104-109.
8. Александров Е.Е., Кузнецов Б.И., Радиевский А.Е., Тернюк Н.Э. Оптимизация электромеханических систем с упругими элементами. –Харьков: ИМІС, 1995. –304 с.
9. Тютиков В.В., Тарарыкин С.В., Красильникьянц Е.В., Салахутдинов Н.В. Синтез систем модального управления заданной статической точности //Электротехника, 2003, №2. С.2-7.
10. Акимов Л.В., Долбня В.Т., Клепиков В.Б., Пирожок А.В. Синтез упрощенных структур двухмассовых электроприводов с нелинейной нагрузкой. –Харьков, НТУ «ХПИ», Запорожье, ЗНТУ, 2002. –160 с.
11. Красовский А.А., Поспелов Г.С. Основы автоматики и технической кибернетики. –М.: Госэнергоиздат, 1962. –600 с.
12. Соколов Н.И. Синтез линейных систем автоматического регулирования при случайных воздействиях. –М.: Энергия, 1964. –128 с.
13. Гуль А.И. Балансировка добротности и запаса устойчивости электромеханических систем //Электротехника, 2003, №4. С.55-62.
14. Гуль А.И. Комплексный критерий качества управления многократноинтегрирующих систем //Вестник НТУ «ХПИ». Проблемы автоматизированного электропривода. Теория и практика. Вып.12, том 1. –Харьков, 2002. С.152-157.