

Міністерство освіти і науки України  
Донецький національний технічний університет

Кафедра "Вища математика"

**Збірник науково-методичних робіт**

Випуск 2

Донецьк -2004

УДК 512.643, 517. 944(09), 517.926, 519.61/.64, 531.38, 535.36, 539.238, 622.831.

Рекомендовано до друку Радою Донецького Національного технічного Університету

Протокол № 4 від 30. 05. 2003 р.

**Збірник науково-методичних робіт.** - Вип. 2. - Донецьк: ДонНТУ, 2004. - 200с.

Процеси гуманізації й гуманітаризації освітньої системи в Україні передбачають виконання значної кількості суттєвих вимог щодо організації навчального процесу у вищих навчальних закладах. Відповідно до цього виникає нагальна потреба в особистісній зорієнтованості навчання, а саме - в створенні умов для розвитку позитивних, і в першу чергу потенцій кожного студента.

В збірнику представлено результати науково-методичних досліджень, в яких обґрунтовуються нові підходи до певних питань методики викладання вищої математики, досліджено окремі історичні аспекти розвитку математики, розглянуто низку цікавих задач з застосування математики в різних галузях науки й техніки.

**Редакційна колегія:** проф. Улитін Г.М. - редактор, проф. Тю Н.С., проф. Лесина М.Є, проф. Косолапов Ю.Ф., доц. Мироненко Л.П., ст. преп. Локтіонов І.К. (ДонНТУ).

Адреса редакційної колегії : Україна, 83050, м. Донецьк, вул. Артема, 96, ДонНТУ, 3-й учбовий корпус, кафедра "Вища математика", тел. (0622) 999901.

© Донецький Національний технічний університет, 2004 р.

**Дифференциал функции и его применение  
к обоснованию «ПРАВИЛА 70»**

*Тю Н.С., Гусар Г.А.*

*Донецкий национальный технический университет*

При изучении различных разделов курса экономики часто используется так называемое «правило 70», согласно которому время удвоения некоторой величины, меняющейся по закону сложных процентов, определяется делением числа 70 на  $r$ , где  $r$  - процентный рост указанной величины за единицу времени [1,2]. Например, если валовой национальный продукт ежегодно возрастает на 5%, то приблизительно через  $70/5=14$  лет он удвоится. В настоящей заметке приводится вывод этого правила, который может быть использован в курсе высшей математики при изложении понятия дифференциала функции.

Пусть функция  $y = f(x)$  определена в некоторой точке  $a$  и её окрестности. Если в этой точке  $f(x)$  имеет конечную производную, то её приращение может быть представлено в виде:

$$\Delta y = dy + \omega(a, \Delta x), \quad (1)$$

где  $dy = f'(a) \cdot \Delta x$  - дифференциал этой функции, а  $\omega(a, \Delta x)$  - бесконечно малая более высокого порядка, чем приращение аргумента  $\Delta x$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

При малых значениях  $\Delta x$  приращение функции приближенно равно её дифференциалу:  $\Delta y \approx dy$ . Учитывая, что  $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ , отсюда получаем:

$$f(a + \Delta x) \approx f(a) + f'(a) \cdot \Delta x. \quad (2)$$

Эта формула удобна для приближенного вычисления значения функции  $f(a + \Delta x)$  по известным значениям функции и её первой производной в точке  $a$ . Например, для логарифмической функции  $y = \ln x$  при  $a=1$  имеем:

$$\ln(1 + \Delta x) \approx \Delta x, \quad (3)$$

так что  $\ln 1.1 \approx 0.1$ ,  $\ln 1.02 \approx 0.02$  и т.д.

Перейдем теперь к выводу «правила 70». Рассмотрим величину  $S$ , зависящую от времени  $t$ , при дискретных значениях  $t = 0; 1\tau; 2\tau; 3\tau; \dots; k\tau$ , где  $\tau$  - некоторая единица времени, например, один год. Значения  $S$  при этих  $t$ , которые мы обозначим  $S_0, S_1, \dots, S_k$ , очевидно, образуют конечную последовательность  $\{S_n\}$ . Многие величины, описывающие окружающую нас действительность (численность человеческой популяции, количество бактерий в культуре, число радиоактивных ядер, сумма банковского вклада на депозите и т.д.), меняются со временем так, что прирост этой величины  $\Delta S_n = S_n - S_{n-1}$  прямо пропорционален значению этой величины в предыдущий момент времени  $S_{n-1}$ . Пусть  $\Delta S_n$  составляет  $r$  % от  $S_{n-1}$ :

$$S_n - S_{n-1} = \frac{r}{100} S_{n-1}. \quad (4)$$

Отсюда находим  $S_n = S_{n-1} \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)$ , т.е. каждый член указанной выше последовательности, начиная со второго, получается из предыдущего умножением на постоянное число. Следовательно, последовательность  $\{S_n\}$  является геометрической прогрессией с первым членом  $S_0$  и знаменателем  $q = \left(1 + \frac{r}{100}\right)$ , поэтому выражение для её члена с номером  $n$  имеет вид:

$$S_n = S_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n. \quad (5)$$

Положим здесь  $n = \frac{t}{\tau}$  и будем считать эту формулу справедливой при произвольных значениях  $t$ . Найдём время  $T$ , за которое величина  $S$  удвоится. Подставив  $S_{\frac{T}{\tau}} = 2S_0$  в (5) и сократив обе части равенства на  $S_0$ , получим показательное уравнение, откуда логарифмированием находим:

$$T = \tau \frac{\ln 2}{\ln \left(1 + \frac{r}{100}\right)} \quad (6)$$

Считая  $\frac{r}{100}$  малой величиной по сравнению с единицей, воспользуемся формулой (3). При этом в числителе появится число  $100 \ln 2 = 69.31\dots$ , которое удобно заменить числом 70. В результате приближённо получим:

$$T = \tau \frac{70}{r} \quad (7)$$

Точность этой формулы невелика, однако она позволяет быстро оценить порядок времени удвоения величины, меняющейся по показательному закону. Например, согласно данным ООН численность населения Земли к началу 1975 г. составляла 4 млрд. человек и ежегодно возрастала на 2 %. Если в обозримом будущем темпы роста останутся неизменными, то, согласно (7), через  $70/2=35$  лет число людей, живущих на Земле, увеличится в два раза и к 2010 году составит примерно 8 млрд. человек.

#### *Литература*

1. Самуэльсон Пол А., Нордхаус Вильям Д. Экономика. - М.: Бином – КноРус, 1997.- 800 с.
2. Липсиц И. Экономика без тайн.- М.: Дело – Вита-пресс, 1994.-352 с.

#### SUMMARY

By using the notion of differential the “rule of 70” is obtained. It can be used for teaching of junior students.

#### СОДЕРЖАНИЕ

1. *Улитин Г.М.* Некоторые вопросы интегрирования линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами... .....3

2. <i>Лесина М.Е.</i> Два случая интегрируемости уравнений Кирхгофа.....	6
3. <i>Тю Н.С., Гусар Г.А.</i> Дифференциал функции и его применение к обоснованию "ПРАВИЛА 70".....	14
4. <i>Лесина М.Е.</i> Новая задача аналитической динамики .....	17
5. <i>Петренко А.Д.</i> Метод медленно меняющихся амплитуд в задачах нелинейной оптики гиротропных сред .....	20
6. <i>Лесина М.Е.</i> Полуобратный метод в динамике систем связанных твердых тел .....	25
7. <i>Петренко А.Д., Волков С.В.</i> Интерполирование на основе определителя Вандермонда .....	37
8. <i>Ехилевский С.Г., Фоменко Т.П., Медовникова А.А.</i> Решение Феррари алгебраических уравнений четвертой степени .....	43
9. <i>Кандауров А.С.</i> Основы матричного исчисления в новой символической записи... ..	47
10. <i>Беловодский В.Н.</i> Об использовании операторной схемы решения при изложении теории систем линейных дифференциальных уравнений ....	58
11. <i>Локтионов И.К., Шевченко Т.С.</i> Универсальное свойство кривых третьего порядка .....	63
12. <i>Онопчук Б. П.</i> Решение одной смешанной модельной сдвиговой задачи для полуплоскости .....	65
13. <i>Откидач В.В., Зубченко А.К., Иванова Л.И.</i> Концепция безопасности на производстве - теория риска .....	70
14. <i>Лесина М.Е., Харламов А.П.</i> Решение задачи о движении по инерции двух гиристов Сретенского .....	74
15. <i>Ехилевский С.Г., Вилкова И.В.</i> Об одной непоследовательности при использовании критерия $\chi^2$ .....	79
16. <i>Ехилевский С.Г., Малащенко В.В.</i> Исследование и построение кривых второго порядка с использованием теории инвариантов .....	81
17. <i>Ехилевский С.Г., Малащенко В.В.</i> О выборе уровня значимости при проверке статистических гипотез .....	94
18. <i>Захаров А.Ю. Щербак Я.Я.</i> Низкотемпературные особенности проводимости в изовалентных твердых растворах .....	101
19. <i>Откидач В.В., Зубченко А.К., Иванова Л.И.</i> Математическая модель описания риска.....	104
20. <i>Ехилевский С.Г., Малащенко В.В.</i> Вариационный подход к	

получению дифференциальной функции распределения. ....	112
21. <i>Косолапов Ю.Ф., Константинова А.О., Хорунжая О.И.</i> Задача Коши в работах Пикара .....	120
22. <i>Косолапов Ю.Ф., Константинова А.О., Хорунжая О.И.</i> Задача Коши в работах Пикара. Часть 2: Проблема обоснования метода последовательных приближений .....	126
23. <i>Косолапов Ю.Ф., Константинова А.О., Хорунжая О.И.</i> Эмиль Пикар и характеристическая задача для линейного уравнения второго порядка .....	132
24. <i>Косолапов Ю.Ф., Константинова А.О., Хорунжая О.И.</i> Характеристическая задача Коши в работах Пикара. Проблема обоснования метода .....	138
25. <i>Косолапов Ю.Ф., Маринова Е.С., Мамичева В.Д., Драченко Л.Н., Прокопенко А.Ю.</i> К методике исследования функций и построения их графиков .....	144
26. <i>Ехилевский С.Г., Вилкова И.В.</i> Получение плотности вероятности системы зависимых, нормально распределенных величин .....	151
27. <i>Прокопенко Н.А.</i> Оптимальный синтез управления для двумерной цепной неголономной системы .....	152
28. <i>Лесина М.Е., Зиновьева Я.В.</i> Вращение гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона .....	158
29. <i>Лесина М.Е., Зиновьева Я.В.</i> Условие существования прецессии общего вида гиростата в магнитном поле .....	169
30. <i>Гончаров А.Н., Гончаров А.А.</i> Качественное исследование динамики одной математической модели .....	190