Міністерство освіти і науки України
Донецький національний технічний університет

Кафедра "Вища математика"

Збірник науково-методичних робіт

Випуск 2

Донецьк -2004

УДК 512.643, 517. 944(09), 517.926, 519.61/.64, 531.38, 535.36, 539.238, 622.831.

Рекомендовано до друку Радою Донецького Національного технічного Університету
Протокол № 4 від 30. 05. 2003 р.

Збірник науково-методичних робіт. - Вип. 2. - Донецьк: ДонНТУ, 2004. - 200с.

Процеси гуманізації й гуманітаризації освітньої системи в Україні передбачають виконання значної кількісті суттєвих вимог щодо організації навчального процесу у вищих навчальних закладах. Відповідно до цього виникає нагальна потреба в особистісній зорієнтованості навчання, а саме - в створенні умов для розвитку позитивних, і в першу чергу потенцій кожного студента.

В збірнику представлено результати науково-методичних досліджень, в яких обгрунтовуються нові підходи до певних питань методики викладання вищої математики, досліджено окремі історичні аспекти розвитку матетематики, розглянуто низку цікавих задач з затосування математики в різних галузях науки й техніки.

Адреса редакційної колегії : Україна, 83050, м. Донецьк, вул. Артема, 96, ДонНТУ, 3-й учбовий корпус, кафедра "Вища математика", тел. (0622) 999901.

УДК 539.238

Дифференциал функции и его применение к обоснованию «ПРАВИЛА 70»

Тю Н.С., Гусар Г.А.
Донецкий национальный технический университет

При изучении различных разделов курса экономики часто используется так называемое «правило 70», согласно которому время удвоения некоторой величины, меняющейся по закону сложных процентов, определяется делением числа 70 на r, где r - процентный рост указанной величины за единицу времени [1,2]. Например, если валовой национальный продукт ежегодно возрастает на 5%, то приблизительно через 70/5=14 лет он удвоится. В настоящей заметке приводится вывод этого правила, который может быть использован в курсе высшей математики при изложении понятия дифференциала функции.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой точке a и её окрестности. Если в этой точке $f(x)$ имеет конечную производную, то её приращение может быть представлено в виде:

$$\Delta y = dy + \omega(a, \Delta x), \tag{1}$$

где $dy = f'(a) \cdot \Delta x$ - дифференциал этой функции, а $\omega(a, \Delta x)$ - бесконечно малая более высокого порядка, чем приращение аргумента Δx при $\Delta x \to 0.$

При малых значениях Δx приращение функции приближенно равно её дифференциалу: $\Delta y \approx dy.$ Учитывая, что $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$, отсюда получаем:

$$f(a + \Delta x) \approx f(a) + f'(a) \cdot \Delta x. \tag{2}$$

Эта формула удобна для приближенного вычисления значения функции $f(a + \Delta x)$ по известным значениям функции и её первой производной в точке *a*. Например, для логарифмической функции $y = \ln x$ при *a*=1 имеем:

$$\ln(1 + \Delta x) \approx \Delta x, \tag{3}$$

так что $\ln 1.1 \approx 0.1, \quad \ln 1.02 \approx 0.02$ и т.д.

Перейдем теперь к выводу «правила 70». Рассмотрим величину *S*, зависящую от времени *t*, при дискретных значениях *t* = 0; 1τ; 2τ; 3τ;…; $k\tau$, где τ - некоторая единица времени, например, один год. Значения *S* при этих *t*, которые мы обозначим $S_0,\ S_1,\dots,\ S_k,$ очевидно, образуют конечную последовательность $\{S_n\}$. Многие величины, описывающие окружающую нас действительность (численность человеческой популяции, количество бактерий в культуре, число радиоактивных ядер, сумма банковского вклада на депозите и т.д.), меняются со временем так, что прирост этой величины $\Delta S_n = S_n - S_{n-1}$ прямо пропорционален значению этой величины в предыдущий момент времени S_{n-1}. Пусть ΔS_n составляет r % от S_{n-1}:

$$S_n - S_{n-1} = \frac{r}{100} S_{n-1}. \qquad (4)$$

Отсюда находим $S_n = S_{n-1} \cdot (1 + \dfrac{r}{100})$, т.е. каждый член указанной выше последовательности, начиная со второго, получается из предыдущего умножением на постоянное число. Следовательно, последовательность $\{S_n\}$ является геометрической прогрессией с первым членом S_0 и знаменателем $q = (1 + {}^{r}\!/_{100})$, поэтому выражение для её члена с номером n имеет вид:

$$S_n = S_0 \cdot (1 + \frac{r}{100})^n. \qquad (5)$$

Положим здесь $n = {}^{t}\!/_{\tau}$ и будем считать эту формулу справедливой при произвольных значениях *t*. Найдём время T, за которое величина S удвоится. Подставив $S_{t/\tau} = 2S_0$ в (5) и сократив обе части равенства на S_0, получим показательное уравнение, откуда логарифмированием находим:

$$T = \tau \frac{\ln 2}{\ln\,(1 + {}^{r}\!/_{100})} \qquad (6)$$

Считая $r/100$ малой величиной по сравнению с единицей, воспользуемся формулой (3). При этом в числителе появится число $100\ln 2$=69.31…, которое удобно заменить числом 70. В результате приближённо получим:

$$T = \tau \frac{70}{r} \tag{7}$$

Точность этой формулы невелика, однако она позволяет быстро оценить порядок времени удвоения величины, меняющейся по показательному закону. Например, согласно данным ООН численность населения Земли к началу 1975 г. составляла 4 млрд. человек и ежегодно возрастала на 2 %. Если в обозримом будущем темпы роста останутся неизменными, то, согласно (7), через 70/2=35 лет число людей, живущих на Земле, увеличится в два раза и к 2010 году составит примерно 8 млрд. человек.

Литература

1. Самуэльсон Пол А., Нордхаус Вильям Д. Экономика. - М.: Бином – КноРус, 1997.- 800 с.
2. Липсиц И. Экономика без тайн.- М.: Дело – Вита-пресс, 1994.-352 с.

SUMMARY

By using the notion of differential the “rule of 70” is obtained. It can be used for teaching of junior students.

СОДЕРЖАНИЕ