

Міністерство освіти і науки України
Донецький національний технічний університет

Кафедра "Вища математика"

Збірник науково-методичних робіт

Випуск 2

Донецьк -2004

УДК 512.643, 517. 944(09), 517.926, 519.61/.64, 531.38, 535.36, 539.238, 622.831.

Рекомендовано до друку Радою Донецького Національного технічного Університету

Протокол № 4 від 30. 05. 2003 р.

Збірник науково-методичних робіт. - Вип. 2. - Донецьк: ДонНТУ, 2004. - 200с.

Процеси гуманізації й гуманітаризації освітньої системи в Україні передбачають виконання значної кількості суттєвих вимог щодо організації навчального процесу у вищих навчальних закладах. Відповідно до цього виникає нагальна потреба в особистісній зорієнтованості навчання, а саме - в створенні умов для розвитку позитивних, і в першу чергу потенцій кожного студента.

В збірнику представлено результати науково-методичних досліджень, в яких обґрунтовуються нові підходи до певних питань методики викладання вищої математики, досліджено окремі історичні аспекти розвитку математики, розглянуто низку цікавих задач з застосування математики в різних галузях науки й техніки.

Редакційна колегія: проф. Улитін Г.М. - редактор, проф. Тю Н.С., проф. Лесина М.Є, проф. Косолапов Ю.Ф., доц. Мироненко Л.П., ст. преп. Локтіонов І.К. (ДонНТУ).

Адреса редакційної колегії : Україна, 83050, м. Донецьк, вул. Артема, 96, ДонНТУ, 3-й учбовий корпус, кафедра "Вища математика", тел. (0622) 999901.

© Донецький Національний технічний університет, 2004 р.

**Исследование и построение кривых второго порядка
с использованием теории инвариантов**

Ехилевский С. Г., Малащенко В. В.

Донецкий национальный технический университет

В роботі запропоновано універсальну, найбільш лаконічну методику приведення рівнянь кривої другого порядку до канонічного вигляду. Суттєве скорочення розрахунків досягається змішаним підходом до їх виконання. Лінійні члени “обертаються” безпосередньо, а квадратичні – за допомогою інваріантів рівняння.

1. Введение.

Кривые второго порядка сыграли исключительно важную роль в развитии науки. Едва ли существует лучший пример простого математического объекта, на протяжении тысячелетий оказывавшегося причастным к самым животрепещущим проблемам естествознания.

Совершенно очевидно, что особый статус этих кривых не случаен. Существуют объективные, связанные с развитием жизненного уклада, и продиктованные логикой самой науки субъективные причины, по которым этому произведению математической мысли была уготована счастливая будущность ребенка, еще до рождения обреченного на долгую и плодотворную жизнь.

Некоторые из этих причин, наиболее бросающиеся в глаза, приведем, не придерживаясь, однако, упомянутого выше деления, ибо наука – реальность сама по себе ничуть не менее объективная, чем остальной мир.

Прежде всего, нельзя не отметить гармонию геометрических форм и лаконизм их алгебраического описания. Счастливое сочетание красоты с постижимостью сути привлекло к этим линиям внимание древних, решивших многие задачи, связанные с изучением свойств и практическим применением этих кривых.

В средние века интерес к ним подогревался развитием астрономии, навигации, геометрической оптики и пр. Однако главный триумф связан с созданием дифференциального и интегрального исчисления. Первым делом вновь созданный аппарат применили к решению основной задачи небесной механики о движении тела в поле притягивающего центра. Необычайно

престижная наука была в то время пискom моды, передовой частью естествознания с колоссальным мировоззренческим и прикладным значением.

Уравнения движения, дополненные законом всемирного тяготения, дали в зависимости от начальных условий эллиптические, параболические или гиперболические орбиты. Такое совпадение “заткнуло за пояс” все объективные и субъективные причины вместе взятые. В самом деле, гравитационный потенциал, “ни сном, ни духом” не ведавший ни о каких уравнениях движения, оказался как раз таким, что при интегрировании последних возникли кривые второго порядка. Это обстоятельство не имеет пока рационального объяснения, хотя, несомненно, глубоко по своей природе. Удивительно, но и самые последние данные с неизменным упорством подтверждают, что гравитационный потенциал с “математической” точностью обратно пропорционален расстоянию до притягивающего центра. Причем границы применимости этого закона простираются от микромира до Вселенной в целом.

Важность происшедшего вышла далеко за рамки простого подтверждения законов Кеплера. Человечество без преувеличения вступило в новую эру. Родилось то, что теперь называют теоретическим методом исследования. Уже этого было бы достаточно, чтобы навсегда вписать перечисленные кривые в историю науки. Однако они не раз пригодились и в дальнейшем.

Классификация кривых второго порядка используется в теории дифференциальных уравнений в частных производных и в достаточных условиях функции двух переменных.

При изучении атома ядро “обстреливали” α -частицами, и вновь “выплыли” гиперболы, т. к. кулоновский потенциал убывает по тому же закону, что и гравитационный.

Наконец, по сей день широко применяют так называемое гармоническое приближение. Абстрагируясь от сути конкретных задач, укажем, что ему соответствует отбрасывание в формуле Тейлора слагаемых третьей и более высоких степеней. При этом линии уровня в окрестности критических точек рассматриваемых функций аппроксимируют кривыми второго порядка.

Принимая во внимание изложенное, целесообразно исследование кривых второго порядка на лекциях и практических занятиях проводить в полном объеме. Однако приведение к каноническому виду общего уравнения кривой второго порядка довольно громоздкая процедура. В условиях дефицита времени, отведенного на общеобразовательные курсы, это вызывает серьезные затруднения как при ее изложении, так и при реализации студентами.

В существующих учебниках с целью ее оптимизации последовательность, в которой выполняют параллельный перенос и поворот системы координат, меняют в зависимости от типа кривой [1].

В настоящей работе предлагается универсальная предельно лаконичная методика решения таких задач. Существенное упрощение выкладок достигается смешанным подходом к их осуществлению. Линейные слагаемые “поворачиваются” непосредственно, а квадратичные с помощью инвариантов уравнения. При этом произвол в определении угла устраняется вычислением инварианта третьего порядка.

2. Инварианты общего уравнения кривой.

Кривая второго порядка есть пересечение плоскости и конуса. Уравнение последнего, поместив начало координат в его центре, запишем в общем (справедливом для любой ориентации) виде

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = 0, \quad (1)$$

или в матричной форме

$$(xyz) \cdot \begin{bmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0. \quad (1^*)$$

Последнее произведение в (1^{*}) можно считать левой частью некоторой системы линейных алгебраических уравнений. Ее определенность устанавливается вычислением главного определителя, значение которого по этой причине не может зависеть от ориентации декартова базиса

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = inv. \quad (2)$$

Поскольку (1) описывает произвольно ориентированный конус, будем считать, что секущая плоскость перпендикулярна оси OZ. Подставив в (1) $z = z_0$, получим общее уравнение кривой¹

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad (3)$$

где трем коэффициентам присвоены новые значения

$$D := Dz_0; \quad E := Ez_0; \quad F := Fz_0^2$$

¹ Являясь общим по виду, (3) получено как сечение конуса и поэтому описывает не все вырожденные случаи.

Заметим, что при этом последние строка и столбец в (2) умножаются на z_0

$$\Delta := z_0^2 \Delta,$$

поэтому при поворотах в плоскости xy ($z=z_0 = \text{const}$) новый определитель также не меняется. Кроме него (см. преобразование матриц при повороте) инвариантны след и определитель двумерной матрицы, фигурирующий в выражении для квадратичной части формулы (3)

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = (x \ y) \cdot \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad (4)$$

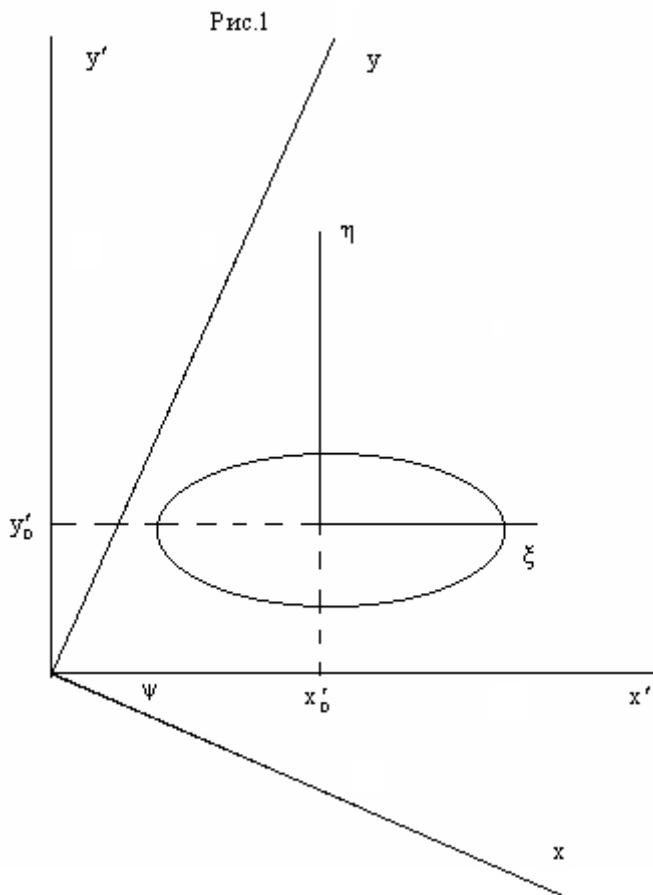
$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = \text{inv}, \quad (5)$$

$$A + C = \text{inv} \quad (6)$$

3. Приведение уравнения кривой к каноническому виду.

Задание. Выяснить, какая кривая (эллипс, гипербола или парабола) описывается уравнением (3) при данных значениях коэффициентов. Определить величину ее параметров (a и b для эллипса и гиперболы и p для параболы) и построить график.

Решение. Рис. 1 на примере эллипса показывает, что поворотом базиса и



сдвигом начала отсчета в плоскости XOY можно перейти в систему координат, расположенную симметрично относительно исследуемой кривой. Там уравнение (3) примет канонический вид, что позволит легко выполнить все пункты задания.

Преобразованием поворота

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C^{-1}(\psi) \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где

$$C(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix}, \quad (8)$$

его матрица, в (3) устраняется произведение x на y . (В уравнении окружности его никогда нет как раз потому, что она симметрична относительно вращений). В штрихованной системе координат (4) примет вид

$$(x' \ y') \cdot \begin{bmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 0, \quad (4')$$

в котором (см. преобразование матриц при повороте)

$$\begin{bmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{bmatrix} = C(\psi) \cdot \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \cdot C^{-1}(\psi). \quad (9)$$

Подставив (8) в (9), получим, что

$$B' = (C - A) \sin \psi \cos \psi + B(\cos^2 \psi - \sin^2 \psi),$$

и из условия $B' = 0$ определим угол необходимого поворота²

$$\psi = 0,5 \cdot \operatorname{arctg} \frac{2B}{A - C} \quad (10)$$

Зная его, можно по формулам (8) и (9) вычислить A' и C' . Удобнее, однако, использовать инварианты кривой. Согласно (5), (6) и с учетом того, что $B' = 0$

$$\begin{cases} A + C = A' + C' \\ AC - B^2 = A'C' \end{cases} \quad (11)$$

Заметим, что A' и C' входят в (11) симметричным относительно перестановки образом. Поэтому два решения системы связаны соотношением

$$A'_{1,2} = C'_{2,1}$$

и, следовательно, отличаются переименованием осей, что в связи с четностью (4') эквивалентно повороту на 90° . С точностью до этого угла и определяется ψ из (10).

Для параллельного переноса

$$\xi = x' - x'_c; \quad \eta = y' - y'_c \quad (12)$$

² Произведение xu отсутствует в канонических уравнениях кривых. Исключение составляет равнобочная гиперболола, для которой существует вторая каноническая форма уравнения, что в рамках выполняемого задания не ограничивает, однако, общности дальнейшего рассмотрения.

прибавим к (4) свободный член и линейную часть (3), преобразованную по формулам (7) и (8) с ψ , удовлетворяющим (10), после чего выделим полные квадраты по x' и y' .

Предварительно, однако, следует убедиться, что произвол в определении ψ, A', C' не привел к тому, что линейные и квадратичные слагаемые “повернуты” на разные (отличающиеся на 90°) углы. Для этого достаточно вычислить Δ до и после поворота.

Выполнить сформулированное задание, если (3) конкретизировано как в предложенных ниже примерах.

Пример 1. $2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 + 2x + 2\sqrt{3}y + 11/5 = 0$.

В этом случае $A=2; B= \sqrt{3}/2; C=1=D; E= \sqrt{3}; F=11/5$, и, согласно (10),

$\psi = 0.5 \arctg \frac{\sqrt{3}}{2-1} = \frac{\pi}{6}$. Подставив это значение в (8), а результат в (7),

осуществим преобразование поворота:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3}x' - y' \\ x' + \sqrt{3}y' \end{bmatrix}.$$

Тогда для линейной части исходного уравнения имеем

$$2x + 2\sqrt{3}y = \sqrt{3}x' - y' + \sqrt{3}x' + 3y' = 2\sqrt{3}x' + 2y',$$

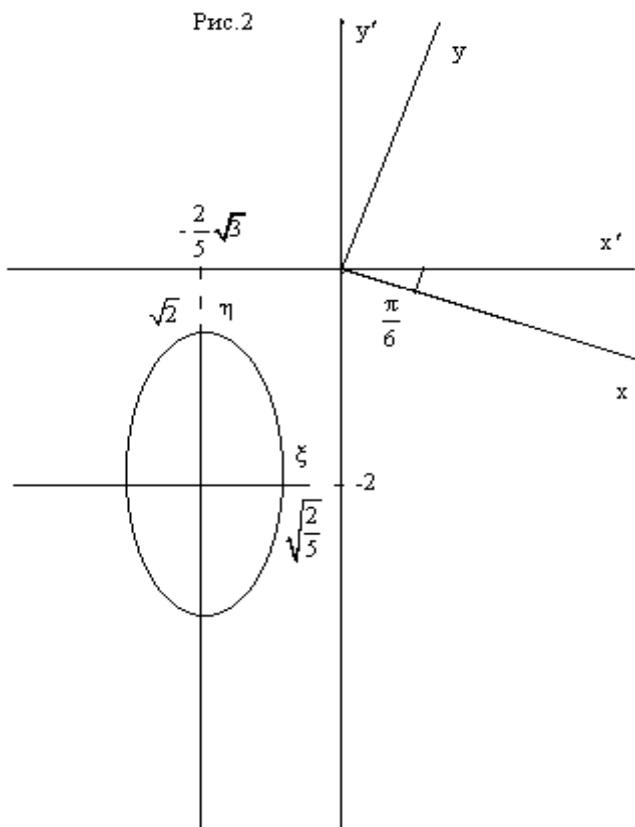
т.е. в повернутой системе координат $D= \sqrt{3}; E=1$. Подставив в (11) значения A, B и C , получим систему уравнений $A' + C' = 3; A'C' = 5/4$ с двумя решениями $A'_1 = 5/2; C'_1 = 1/2$ и наоборот $A'_2 = 1/2; C'_2 = 5/2$. Чтобы выбрать нужное, вычислим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & \sqrt{3}/2 & 1 \\ \sqrt{3}/2 & 1 & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3} & 11/5 \end{vmatrix} = -5/4 \qquad \Delta'_1 = \begin{vmatrix} 5/2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 1/2 & 1 \\ \sqrt{3} & 1 & 11/5 \end{vmatrix} = -5/4 = \Delta,$$

т.е. второе решение не подходит. Объединив квадратичные слагаемые с линейными, в повернутой системе координат вместо исходного получим уравнение $2,5x'^2 + 0,5y'^2 + 2\sqrt{3}x' + 2y' + 11/5 = 0$, в котором выделим полные квадраты: $2,5(x' + 2\sqrt{3}/5)^2 + 0,5(y' + 2)^2 - 1 = 0$ (т.е. $F' = -1$), после чего

запишем его в каноническом виде $\frac{\xi^2}{2/5} + \frac{\eta^2}{2} = 1$. Здесь

$\xi = x' + 2\sqrt{3}/5$; $\eta = y' + 2$. Таким образом, имеем эллипс с полуосями $a = \sqrt{2/5}$; $b = \sqrt{2}$ (см. рис.2).



Решения второго и третьего примеров получены по изложенной методике и приводятся без подробных объяснений.

Пример 2. $x^2 + 4xy + y^2 + \sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 2 = 0$. $A=1$; $B=2$; $C=1$; $D = 1/\sqrt{2}=E$;
 $F = -2$;

$$\psi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{4}{1-1} = \frac{\pi}{4}; \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} x' - y' \\ x' + y' \end{bmatrix};$$

$$\sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 2x' \Rightarrow$$

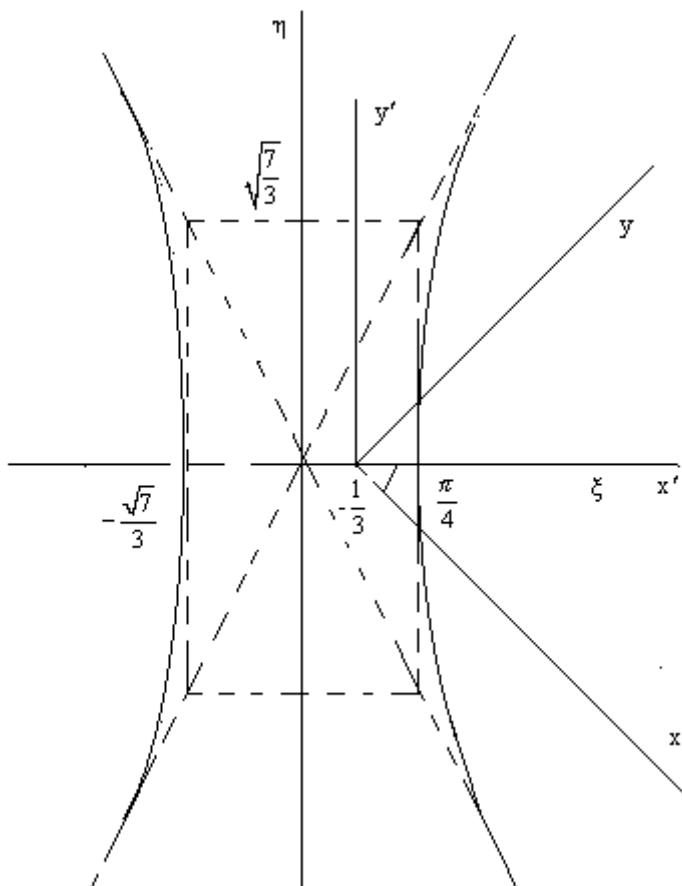
$$D'=1; E'=0; \left. \begin{array}{l} 1+1=2=A'+C' \\ 1 \times 1 - 2^2 = -3 = A' \times C' \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A'_1 = -1 = C'_2 \\ A'_2 = 3 = C'_1 \end{array};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1/\sqrt{2} \\ 2 & 1 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & -2 \end{vmatrix} = 7 = \Delta'_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow 3x'^2 - y'^2 + 2x' - 2 = 0;$$

$$3(x' + 1/3)^2 - y'^2 - 7/3 = 0; (F' = -7/3); \xi = x' + 1/3; \eta = y';$$

$9\xi^2 - 3\eta^2 = 7$; гипербола с $a = \sqrt{7}/3$; $b = \sqrt{7}/3$ (см. рис. 3).

Рис.3



Пример 3.

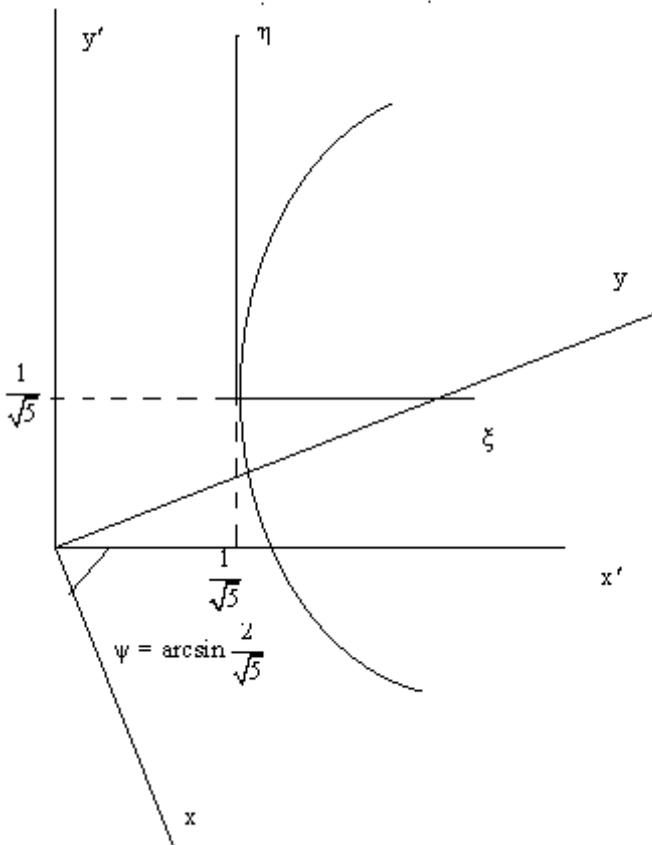
$$4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0. \quad \psi = 0.5 \arctg(-4/3) \Rightarrow \operatorname{tg} 2\psi = -4/3.$$

Если значение тангенса неудобное (ψ не является рациональной частью π), элементы матрицы поворота определяют с помощью формулы

$$\sin^2 \psi_{1,2} = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\psi} \pm 1}{2\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\psi}} = \cos^2 \psi_{2,1}. \quad \text{Неоднозначность отражает упомянутый}$$

произвол в определении ψ . (При изменении ψ на $\pi/2$ квадраты синуса и косинуса “обмениваются” значениями.) Выбирая $\psi = \psi_1$, найдем $\sin^2 \psi = 2/5 > \cos^2 \psi = 1/5$, откуда при $\operatorname{tg} 2\psi < 0$ следует, что ψ лежит в

Рис.4



первой или в третьей четверти, в чем легко убедиться с помощью формулы

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}.$$

Полагая для 1-й четверти $\sin \psi = 2/\sqrt{5}$; $\cos \psi = 1/\sqrt{5}$, с помощью (7), (8) получим $x = (x' - 2y')/\sqrt{5}$; $y = (2x' + y')/\sqrt{5}$, откуда $-2x - 14y = -6\sqrt{5}x' - 2\sqrt{5}y'$, т.е. $D' = -3/\sqrt{5}$, $E' = -\sqrt{5}$; $5 = A' + C'$, $0 = A'C' \Rightarrow A'_1 = C'_2 = 5$; $C'_1 = A'_2 = 0$;

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -7 \\ -1 & -7 & 7 \end{vmatrix} = -225; \quad \Delta'_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -3/\sqrt{5} \\ 0 & 5 & -\sqrt{5} \\ -3/\sqrt{5} & -\sqrt{5} & 7 \end{vmatrix} = -225 = \Delta;$$

$$5y'^2 - 6\sqrt{5}x' - 2\sqrt{5}y' + 7 = 0; \quad 5(y' - 1/\sqrt{5})^2 - 6\sqrt{5}(x' - 1/\sqrt{5}) = 0; \quad \eta = y' - 1/\sqrt{5};$$

$$\xi = x' - 1/\sqrt{5}; \quad \eta^2 = 6\xi/\sqrt{5}; \quad \text{парабола с } p = 3/\sqrt{5} \text{ (см. рис. 4)}.$$

4. Классификация кривых II порядка.

Если строить график не нужно (нет необходимости в определении ψ и выделении полного квадрата), тип и параметры кривой можно определить, пользуясь инвариантами ее уравнения. Покажем прежде, что они остаются таковыми и при параллельных переносах системы координат. Для $A + C$ и δ это очевидно, так как квадратичные слагаемые при сдвиге начала отсчета порождают линейные и нулевого порядка (см. (4') и (12)), но сами при этом не меняются. Рассмотрим теперь Δ . Не ограничивая общности, будем считать,

³ Для $\psi = \psi_2$ имеем $\sin^2 \psi < \cos^2 \psi$, т.е. оси переименовались и угол поворота для перехода в нужную систему координат уменьшается (увеличивается) на $\pi/2$. Действительно, согласно последней формуле при $\operatorname{tg} 2\psi < 0$ знаки синуса и косинуса не совпадают, т.е. ψ принадлежит 2-й или 4-й четверти. Произвол, так же, как и при переходе из 1-й четверти в 3-ю, исчерпывается заменой осей противоположно направленными.

что нужный поворот уже произведен ($B = 0$; $\Delta = \begin{vmatrix} A & O & D \\ O & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$). Тогда в результате

переноса начала координат в точку $(x_0, 0)$ уравнение (3) примет вид

$$A(x - x_0)^2 + Cy^2 + 2D(x - x_0) + 2Ey + F = Ax^2 + Cy^2 + 2(D - Ax_0)x + 2Ey + F + Ax_0^2 - 2Dx_0 = 0.$$

Ему соответствует

$$\begin{aligned} \Delta^* &= \begin{vmatrix} A & 0 & D - Ax_0 \\ 0 & C & E \\ D - Ax_0 & E & F + Ax_0^2 - 2Dx_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 & D \\ 0 & C & E \\ D - Ax_0 & E & F \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & 0 & -Ax_0 \\ 0 & C & 0 \\ D - Ax_0 & E & Ax_0^2 - 2Dx_0 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} A & 0 & D \\ 0 & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & D \\ 0 & C & E \\ Ax_0 & E & F \end{vmatrix} + x_0 \begin{vmatrix} A & 0 & -A \\ 0 & C & 0 \\ D - Ax_0 & E & Ax_0 - 2D \end{vmatrix} = \\ &= \Delta - ACDx_0 + x_0 \begin{vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ D - Ax_0 & E & -D \end{vmatrix} = \Delta = \Delta^* = inv. \end{aligned}$$

Аналогично рассматривается перенос вдоль оси OY . Таким образом, Δ не меняется при сдвиге начала отсчета в произвольную точку (x_0, y_0) . Обратимся теперь к системе (11). Очевидно, при $\delta = 0$ вместе с B в результате поворота “исчезнет” A или C , т.е. рассматриваемая кривая – параболического типа. Если $\delta > 0$, A' и C' одного знака, следовательно, кривая – эллиптического типа, а при $\delta < 0$ – гиперболического. В случае $\delta \neq 0$ после приведения уравнения к каноническому виду получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} A' & 0 & 0 \\ 0 & C' & 0 \\ 0 & 0 & F' \end{vmatrix} = A' C' F' = \delta \cdot F' \Rightarrow F' = \Delta / \delta. \quad (13)$$

Пример 4. Убедиться, что в случаях, рассмотренных в 1-ом и во 2-ом примерах соотношение (13) имеет место.

$$1) \quad -1 = F' = \Delta/\delta = \frac{-5/4}{5/4} = -1; \quad 2) \quad -7/3 = F' = \frac{7}{-3} = -7/3.$$

Для эллиптического типа $\Delta \neq 0$ означает, что $F' \neq 0$ (см. (13)), то есть (3) описывает реальный ($(A'/F') > 0$) или мнимый ⁴ ($(A'/F') < 0$) эллипс. При $\Delta=0$ “графиком” (3) является точка (вырожденный эллипс). Очевидно, при этом секущей плоскости принадлежит только центр конуса. Если тип гиперболический, то при $\delta \neq 0$ графиком (3) будет обычная гипербола, а при $\Delta=0$, когда (см. (13)) $F'=0$, - вырожденная (две пересекающиеся прямые (плоскость $z = z_0$ разрезает боковую поверхность конуса через его центр)).

Наконец, в случае параболического типа

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & D' \\ 0 & C' & 0 \\ D' & 0 & F' \end{vmatrix} = (\text{или} \begin{vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E \\ 0 & E & F' \end{vmatrix}) = -C'D'^2 = \Delta, \quad (14)$$

что при известных Δ и C' из уравнения $C'\eta^2 + 2D'\xi = 0$ позволяет найти модуль параметра параболы

$$|p| = |D'/C'| = \sqrt{-\Delta/C'/C'}. \quad (15)$$

Пример 5. Убедиться, что для случая из примера 3 формулы (14), (15) имеют место.

$$-5D'^2 = -225 \Rightarrow D' = 3\sqrt{5}; \quad 3/\sqrt{5} = |p| = 3\sqrt{5}/5 = 3/\sqrt{5}.$$

⁴ Этот случай не интерпретируется как “сечение” конуса и имеет место, когда “секущая” плоскость проходит мимо эллипсоида. Последний описывается (1), если туда добавить свободный член F_0 , что перенормирует константу в (3), но не нарушит рассуждений, основанных на инвариантности Δ :

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F+F_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & B & 0 \\ B & C & 0 \\ D & E & F_0 \end{vmatrix} = \Delta + \delta \cdot F_0 = inv.$$

Таким образом, при $\Delta \neq 0$ (3) описывает обычную параболу, а при $\Delta=0$, когда $p=0$, - вырожденную: две параллельные, слившиеся ($F'=0$) или мнимые прямые. Их происхождение понятно, если учесть, что цилиндр является частным (предельным) случаем конуса, когда его центр при уменьшении угла раствора уходит на бесконечность (в (1) при этом отсутствуют все x или y).

Результаты исследования занесены в таблицу.

	$\Delta \neq 0$	$\Delta=0$
$\delta > 0$	эллипс (действительный или мнимый)	точка
$\delta < 0$	гипербола	пара пересекающихся прямых
$\delta = 0$	парабола	Пара параллельных, слившихся или мнимых прямых

Литература

1. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. - М.: Наука, 1969. - 256 с.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Улитин Г.М. Некоторые вопросы интегрирования линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.....	3
2. Лесина М.Е. Два случая интегрируемости уравнений Кирхгофа.....	6
3. Тю Н.С., Гусар Г.А. Дифференциал функции и его применение к обоснованию "ПРАВИЛА 70".....	14
4. Лесина М.Е. Новая задача аналитической динамики.....	17
5. Петренко А.Д. Метод медленно меняющихся амплитуд в задачах нелинейной оптики гиротропных сред.....	20
6. Лесина М.Е. Полуобратный метод в динамике систем связанных твердых тел.....	25
7. Петренко А.Д., Волков С.В. Интерполирование на основе определителя Вандермонда.....	37
8. Ехилевский С.Г., Фоменко Т.П., Медовникова А.А. Решение Феррари алгебраических уравнений четвертой степени.....	43
9. Кандауров А.С. Основы матричного исчисления в новой символической записи.....	47
10. Беловодский В.Н. Об использовании операторной схемы решения при изложении теории систем линейных дифференциальных уравнений.....	58
11. Локтионов И.К., Шевченко Т.С. Универсальное свойство кривых третьего порядка.....	63
12. Онопчук Б. П. Решение одной смешанной модельной сдвиговой задачи для полуплоскости.....	65
13. Откидач В.В., Зубченко А.К., Иванова Л.И. Концепция безопасности на производстве - теория риска.....	70
14. Лесина М.Е., Харламов А.П. Решение задачи о движении по инерции двух гиростатов Сретенского.....	74
15. Ехилевский С.Г., Вилкова И.В. Об одной непоследовательности при использовании критерия χ^2	79
16. Ехилевский С.Г., Малащенко В.В. Исследование и построение кривых второго порядка с использованием теории инвариантов.....	81
17. Ехилевский С.Г., Малащенко В.В. О выборе уровня значимости при проверке статистических гипотез.....	94
18. Захаров А.Ю. Щербак Я.Я. Низкотемпературные особенности	

проводимости в изовалентных твердых растворах	101
19. <i>Откидач В.В., Зубченко А.К., Иванова Л.И.</i> Математическая модель описания риска.....	104
20. <i>Ехилевский С.Г., Малащенко В.В.</i> Вариационный подход к получению дифференциальной функции распределения.	112
21. <i>Косолапов Ю.Ф., Константинова А.О., Хорунжая О.И.</i> Задача Коши в работах Пикара	120
22. <i>Косолапов Ю.Ф., Константинова А.О., Хорунжая О.И.</i> Задача Коши в работах Пикара. Часть 2: Проблема обоснования метода последовательных приближений	126
23. <i>Косолапов Ю.Ф., Константинова А.О., Хорунжая О.И.</i> Эмиль Пикар и характеристическая задача для линейного уравнения второго порядка	132
24. <i>Косолапов Ю.Ф., Константинова А.О., Хорунжая О.И.</i> Характеристическая задача Коши в работах Пикара. Проблема обоснования метода	138
25. <i>Косолапов Ю.Ф., Маринова Е.С., Мамичева В.Д., Драченко Л.Н., Прокопенко А.Ю.</i> К методике исследования функций и построения их графиков.....	144
26. <i>Ехилевский С.Г., Вилкова И.В.</i> Получение плотности вероятности системы зависимых, нормально распределенных величин.....	151
27. <i>Прокопенко Н.А.</i> Оптимальный синтез управления для двумерной цепной неголономной системы	152
28. <i>Лесина М.Е., Зиновьева Я.В.</i> Вращение гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона	158
29. <i>Лесина М.Е., Зиновьева Я.В.</i> Условие существования прецессии общего вида гиростата в магнитном поле	169
30. <i>Гончаров А.Н., Гончаров А.А.</i> Качественное исследование динамики одной математической модели	190