

УДК 621.01; 621.87

В.С. Ловейкін, д-р техн. наук, проф., **Ю.В. Човнюк**, канд. техн. наук, доц., Національний університет біоресурсів і природокористування України, м. Київ,

К.І. Почка, канд. техн. наук, доц.,

М.Г. Діктерук, канд. техн. наук, доц., Київський національний університет будівництва і архітектури

ОПТИМІЗАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ НЕСТАЦІОНАРНИХ КОЛИВАНЬ ЛІНІЙНИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ ПРИ ПЕРЕХОДІ ЧЕРЕЗ РЕЗОНАНС

Встановлено критерії та оптимальні режими руху лінійних механічних систем з одним ступенем вільності руху при їх переході через резонанс в умовах нестационарних коливань механічних систем.

Ключові слова: оптимізація, режим руху, резонанс, нестационарні коливання.

Постановка проблеми. Відомо, що підвищення продуктивності та надійності, а також зменшення енергетичних витрат механічних систем – це один з основних стратегічних напрямків підвищення ефективності виробничих процесів [1]. На продуктивність та надійність механічних систем суттєвий вплив мають динамічні навантаження, що виникають в цих системах під час руху. Вибір режимів руху механічних систем, які до мінімуму зводять динамічні навантаження, можливий лише при використанні теорії оптимального керування рухом при наявності узагальнених динамічних критеріїв. Цілеспрямований вибір режимів руху та режимних параметрів дозволяє до мінімуму звести динамічні навантаження, а також знизити енергетичні витрати та використати приводний механізм найменшої потужності.

Для оптимізації режимів руху та режимних параметрів необхідна, перш за все, кількісна оцінка перехідних процесів (пуск, гальмування, реверсування тощо) і усталеного режиму руху за весь цикл руху механічної системи у вигляді одного критерію чи системи критеріїв. У такому разі доцільно використати локальні й інтегральні динамічні та енергетичні критерії, отримані на основі функціоналу дії та варіаційних принципів механіки. Ці критерії відображають небажані властивості (витрати енергії, дія динамічних навантажень, коливання ланок тощо), якими характеризується динамічна система під час руху, тому підлягають мінімізації. Інтегральні функціонали (критерії) за-

лежать від різних функцій та параметрів режимів руху. Відповідний вибір цих залежностей і параметрів дозволяє мінімізувати функціонали і поліпшити ті чи інші властивості механічної системи.

Мінімізація функціоналів пов'язана з розв'язанням варіаційної задачі динаміки руху механічної системи. Математичний розв'язок цієї задачі зводиться до крайової задачі, яка, у загальному випадку, визначається системою нелінійних диференціальних рівнянь Ейлера-Пуассона, рівняннями руху та крайовими умовами руху механічної системи. У деяких часткових випадках можна отримати аналітичний розв'язок цієї задачі, однак, для розв'язку більшості практичних задач використовуються чисельні методи.

Слід також зазначити, що вивчення нестационарних коливних процесів у механічних деформівних системах представляє великий інтерес для сучасної техніки у зв'язку зі значним збільшенням потужностей та швидкостей руху машин.

Нестационарні коливання елементів турбін, двигунів внутрішнього згорання та інших машин (будівельного, сільськогосподарського призначення) виникають при неусталених режимах їх роботи, пуску та зупинки, балансуванні тощо.

Найбільш повно вивчені нестационарні коливання при переході через резонанс лінійних систем. Однак вичерпного рішення, доведеного до практичних застосувань, для багатьох лінійних задач не існує. Саме у цій роботі здійснена спроба отримання таких рішень.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У роботі [2] викладені результати досліджень щодо перехідних процесів у лінійних системах з будь-яким числом ступенів вільності руху. Оптимізація перехідних режимів руху механічних систем здійснена у роботах [1, 3-5, 7-17]. Проте, авторам даної роботи невідомі дослідження, які б стосувались оптимізації параметрів нестационарних коливань лінійних механічних систем з одним ступенем вільності руху при їх переході через резонанс.

Метою даної роботи є встановлення критеріїв та оптимальних режимів руху лінійних механічних систем з одним ступенем вільності руху при їх переході через резонанс в умовах нестационарних коливань останніх. При досягненні вказаної мети роботи використані підходи [1, 3-5, 7-17], засновані на варіаційних методах.

Виклад основного матеріалу дослідження.

1. Постановка задачі.

Дослідження нестационарних процесів у лінійних системах з одним ступенем вільності руху у припущенні, що джерело енергії має досить велику потужність, зводиться до інтегрування диференціального рівняння [2]:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \mu \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \omega^2 \cdot \varphi = P(t) \cdot \cos \theta(t), \quad (1)$$

де $\varphi(t)$ – можна розглядати як лінійне переміщення; μ – коефіцієнт, що характеризує згасання; ω – частота вільних коливань; $P(t)$ – амплітуда вимушеної сили, віднесена до одиниці маси системи; t – час.

При цьому частота зовнішньої сили $\nu = \frac{d\theta}{dt}$ є деякою функцією часу (тобто $\nu = \nu(t)$); у найпростішому випадку це лінійна функція:

$$\nu = \nu(t) = \varepsilon \cdot t, \quad (2)$$

де ε – швидкість зміни частоти $\nu(t)$.

Початкові умови мають вигляд наступних:

$$\varphi|_{t=0} = \varphi_0; \quad \dot{\varphi}|_{t=0} = \dot{\varphi}_0. \quad (3)$$

У (3) введемо позначення: $(\dot{\quad}) \equiv \frac{d}{dt}(\quad)$.

2. Розв'язок задачі у загальному виді.

Розв'язок диференціального рівняння (1) за умов (3) має наступний вигляд:

$$\varphi(t) = e^{-\frac{\mu}{2}t} \cdot (C_1 \cdot \cos kt + C_2 \cdot \sin kt) + \frac{1}{k} \cdot \int_0^t P(\tau) \cdot \cos \theta(\tau) \cdot e^{-\frac{\mu}{2}(t-\tau)} \cdot \sin k \cdot (t-\tau) d\tau, \quad (4)$$

де
$$C_1 = \varphi_0; \quad C_2 = \frac{\dot{\varphi}_0 + \frac{\mu}{2} \cdot \varphi_0}{k}; \quad k = \sqrt{\omega^2 - \frac{\mu^2}{4}}. \quad (5)$$

Розв'язок (4) можна подати й у іншому (більш зручному для аналізу) вигляді:

$$\bar{\varphi}(t) = \varphi(t) - e^{-\frac{\mu}{2}t} \cdot (C_1 \cdot \cos kt + C_2 \cdot \sin kt) = |A(t)| \cdot \cos[\theta(t) + \delta_1(t)], \quad (6)$$

де

$$\left\{ \begin{array}{l} |A(t)| = \sqrt{[\operatorname{Re} A(t)]^2 + [\operatorname{Im} A(t)]^2}; \delta_1(t) = -\operatorname{arctg} \left\{ \frac{\operatorname{Im} A(t)}{\operatorname{Re} A(t)} \right\}; \\ \operatorname{Re} A(t) = \frac{1}{k} \cdot \int_0^t P(\tau) \cdot \cos \theta(\tau) \cdot e^{-\frac{\mu}{2} \cdot (t-\tau)} \cdot \sin k \cdot (t-\tau) d\tau; \\ \operatorname{Im} A(t) = \frac{1}{k} \cdot \int_0^t P(\tau) \cdot \sin \theta(\tau) \cdot e^{-\frac{\mu}{2} \cdot (t-\tau)} \cdot \sin k \cdot (t-\tau) d\tau. \end{array} \right. \quad (7)$$

Розглянемо резонансні значення $\varphi(t)$ за умов зміни частоти коливань (2).

Випадок А. Нехай у механічній системі відбувається зміна частоти від 0 до $\nu_0 = \nu_{\text{ном}}$ (номінального значення) самого джерела енергії. Тоді умова резонансу означає:

$$\varepsilon \cdot t_1^* = k; \quad t_1^* = \frac{k}{\varepsilon}; \quad \nu_0 > k. \quad (8)$$

У (8) t_1^* означає момент часу, у котрий наступає резонанс. При цьому $\varphi(t)$ набуває величини:

$$\begin{aligned} \varphi(t_1^*) = \varphi_{\text{рез}}^* = & \left| A(t_1^*) \right| \cdot \cos[\theta(t_1^*) + \delta_1(t_1^*)] + \\ & + e^{-\frac{\mu}{2} \cdot t_1^*} \cdot (C_1 \cdot \cos kt_1^* + C_2 \cdot \sin kt_1^*) \end{aligned} \quad (9)$$

Випадок Б. Нехай у механічній системі відбувається зміна частоти від $\nu_0 = \nu_{\text{ном}}$ до нуля самого джерела енергії. Тоді умова резонансу означає:

$$\nu(t) = \nu_0 - \varepsilon \cdot t; \quad \nu_0 - \varepsilon \cdot t_2^* = k; \quad t_2^* = \frac{\nu_0 - k}{\varepsilon}; \quad \nu_0 > k. \quad (8^*)$$

Значення $\varphi(t_2^*)$ можна отримати з (9), замінюючи t_1^* на t_2^* .

Використовуючи результати роботи А.М. Каца [6], можемо встановити більш точні значення t_1^* та t_2^* :

$$t_1^{**} = \frac{k \cdot \xi_m^{(+)}}{\varepsilon}; \quad \xi_m^{(+)} = 1 + \frac{1,0854}{\lambda^0 \cdot h \cdot (1 + 0,28 \cdot h)^2}; \quad h = \frac{\mu}{2 \cdot \sqrt{\varepsilon}}; \quad \lambda^0 = \frac{k}{\mu}. \quad (10)$$

$$t_2^{**} = \frac{(-k + \nu_0) \cdot \xi_m^{(-)}}{\varepsilon}; \quad \xi_m^{(-)} = 1 - \frac{1,0854}{\lambda^0 \cdot h \cdot (1 + 0,28 \cdot h)^2}. \quad (11)$$

Тоді резонансне значення (уточнене) $\varphi(t)$ має вид:

$$\varphi(t_1^{**}) = |A(t_1^{**})| \cdot \cos[\theta(t_1^{**}) + \delta_1(t_1^{**})] + e^{-\frac{\mu}{2} \cdot t_1^{**}} \cdot (C_1 \cdot \cos kt_1^{**} + C_2 \cdot \sin kt_1^{**}). \quad (12)$$

(Для $\varphi(t_2^{**})$ можна отримати вираз, подібний (12) із заміною у ньому t_1^{**} на t_2^{**}).

3. Визначення тривалості перехідного процесу у механічній системі.

Для проведення розрахунків, пов'язаних з проходженням через резонанс, для визначення динамічних навантажень, а також для розв'язку інших інженерних задач необхідно знати, за яким законом змінюються оберти машин у перехідних режимах. Зокрема, для визначення максимальної амплітуди коливань необхідно знати кутове прискорення у момент співпадання частот вимушеної сили й власних коливань системи, оскільки максимум амплітуди коливань суттєво залежить від кутового прискорення саме у цей момент. Закон зміни обертів поза резонансом впливає на результат порівняно слабо.

Визначаючи кутове прискорення, яке відповідає резонансу, будемо виходити з припущення, що зворотній вплив коливної системи на двигун є слабким (тому ним можна знехтувати) і що моментна характеристика двигуна не залежить від кутового прискорення, тобто є статичною.

Отже, нехтуючи крутними коливаннями у системі двигун-привод, складемо диференціальне рівняння обертального руху:

$$J \cdot \ddot{\tilde{\varphi}} + M_{on}(\dot{\tilde{\varphi}}) = M(\dot{\tilde{\varphi}}), \quad (13)$$

де $\tilde{\varphi}$ – кут повороту ротора двигуна; $M(\dot{\tilde{\varphi}})$ – стаціонарна моментна характеристика двигуна; $M_{on}(\dot{\tilde{\varphi}})$ – момент сил опору; J – приведений до валу двигуна момент інерції деталей, що обертаються.

Звідси кутова швидкість у момент співпадання частоти вимушеної сили з власною частотою системи (k):

$$\varepsilon = \frac{1}{J} \cdot [M(\omega) - M_{on}(\omega)], \quad (14)$$

де $\omega \equiv k$ – власна частота коливань системи (5).

Приведемо основні результати, які можна отримати для короткозамкненого асинхронного двигуна.

Обертальний момент на валу двигуна визначимо за формулою Клосса:

$$M(\omega) = \frac{2 \cdot M_{\max} \cdot s_k \cdot \left(1 - \frac{\omega}{\omega_c}\right)}{\left\{\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\omega}{\omega_c} + 1 + s_k^2\right\}}, \quad (15)$$

де $M_{\max} = m_M \cdot M_H$; $M_H = \frac{9550}{n_H} \cdot N$; $[M_H] = H \cdot \text{м}$;

$$s_k = s_H \cdot \left(m_M + \sqrt{m_M^2 - 1}\right); s_H = \frac{n_c - n_H}{n_c}; \omega_c = \frac{\pi \cdot n_c}{30};$$

$[n_H] = [n_c] = \text{хв}^{-1} \cdot \text{оберти}$; $[\omega_c] = \text{с}^{-1}$; M_{\max} , M_H – максимальний та номінальний моменти двигуна; $[M_{\max}] = H \cdot \text{м}$; m_M – кратність максимального моменту; N – потужність двигуна; $[N] = \text{кВт}$; n_H – номінальне число обертів; n_c – синхронні оберти двигуна за хв., які визначаються як найближча більша n_H частка від ділення 3000 на ціле число; s_H – ковзання при номінальному режимі; s_k – критичне ковзання – ковзання, за якого досягається максимальний обертальний момент.

У режимі пуску двигуна на холостому ході сили опору обумовлені тертям у підшипниках та інших частинах, а також втратами на вентиляцію та ін. Сумарний момент цих сил у робочому режимі складає біля 10 % від номінального моменту двигуна. Тому при розгляді пуску машини без навантаження припускаємо $M_{on} = 0$.

Для приладів, обладнання з відцентровими насосами, вентиляторами й таких, що мають значні втрати у редукторах при пуску під навантаженням рекомендується [2] лінійна залежність:

$$M_{on}(\omega) = \frac{M_H}{(1 - s_H)} \cdot \frac{\omega}{\omega_c}. \quad (16)$$

Навантаження від віброгрозотів та інших віброустановок приймається пропорційним квадрату кутової швидкості:

$$M_{on}(\omega) = \frac{M_H}{(1 - s_H)^2} \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2. \quad (17)$$

Підставляючи вирази для $M_{on}(\omega)$ й $M(\omega)$ у рівняння (14), отримаємо розрахункові формули для визначення швидкості проходження через резонанс (ε):

1) при пуску двигуна без навантаження:

$$\varepsilon = f_1(\omega) = \frac{M_{\max}}{J} \cdot \frac{2 \cdot s_k \cdot \omega_c \cdot (\omega_c - \omega)}{\omega^2 - 2 \cdot \omega \cdot \omega_c + \omega_c^2 \cdot (1 + s_k^2)}; \quad (18)$$

2) при лінійній характеристиці навантаження:

$$\varepsilon = f_2(\omega) = \frac{M_H}{J} \cdot \left\{ \frac{2 \cdot s_k \cdot m_M \cdot \omega_c \cdot (\omega_c - \omega)}{\omega^2 - 2 \cdot \omega \cdot \omega_c + \omega_c^2 \cdot (1 + s_k^2)} - \frac{\omega}{(1 - s_H) \cdot \omega_c} \right\}; \quad (19)$$

3) при квадратичній характеристиці навантаження:

$$\varepsilon = f_3(\omega) = \frac{M_H}{J} \cdot \left\{ \frac{2 \cdot s_k \cdot m_M \cdot \omega_c \cdot (\omega_c - \omega)}{\omega^2 - 2 \cdot \omega \cdot \omega_c + \omega_c^2 \cdot (1 + s_k^2)} - \frac{\omega^2}{(1 - s_H)^2 \cdot \omega_c^2} \right\}. \quad (20)$$

Вказані вирази (18)-(20) можна використати для розрахунків t_1^* , t_1^{**} , t_2^* , t_2^{**} за формулами (8), (8^{*}), (10), (11).

Крім того, враховуючи, що $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$, вирази (18)-(20) можна застосувати для визначення тривалості перехідного процесу у механічній системі:

$$t_{p1} = \int_0^{\omega_{ном}} f_1^{-1}(\omega) d\omega; \quad (21)$$

$$t_{p2} = \int_0^{\omega_{ном}} f_2^{-1}(\omega) d\omega; \quad (22)$$

$$t_{p3} = \int_0^{\omega_{ном}} f_3^{-1}(\omega) d\omega, \quad (23)$$

де $\omega_{ном} = \frac{\pi \cdot n_H}{30}$, $[\omega_{ном}] = c^{-1}$.

3. Критерії якості руху механічних систем за наявності нестационарних коливань.

Виходячи з рівняння (1), розглянемо кілька критеріїв якості руху механічних систем за наявності у останніх нестационарних коливань.

А) Визначимо закон руху $\varphi(t)$, за якого квадрат лінійного переміщення системи набуває мінімального значення при $t \in [0; t_p]$. При цьому необхідно задовольнити наступному критерію якості руху системи:

$$\int_0^{t_p} \varphi^2(t) dt \Rightarrow \min. \quad (24)$$

Враховуючи (1), критерій (24) можна подати у наступному вигляді:

$$\left(\frac{1}{\omega^2}\right)^2 \cdot \int_0^{t_p} [P(t) \cdot \cos \theta(t) - \mu \cdot \dot{\varphi} - \ddot{\varphi}]^2 dt \Rightarrow \min. \quad (25)$$

Для задоволення критерію (25), випишемо рівняння Ейлера-Пуассона, що і визначить необхідний (оптимальний, з точки зору вказаного критерію) закон руху $\varphi(t)$:

$$\overset{(IV)}{\varphi} - \mu^2 \cdot \ddot{\varphi} = \frac{d^2}{dt^2} \cdot [P(t) \cdot \cos \theta(t)] - \mu \cdot \frac{d}{dt} \cdot [P(t) \cdot \cos \theta(t)]. \quad (26)$$

Розв'язок (26) має вид:

$$\varphi(t) = C_1 + C_2 \cdot t + C_3 \cdot e^{\mu \cdot t} + C_4 \cdot e^{-\mu \cdot t} + \varphi_{\text{част.}}(t), \quad (27)$$

де $\varphi_{\text{част.}}(t)$ – частинний розв'язок (26); $C_i, i = \overline{(1,4)}$ – константи, що визначаються за наступних умов:

$$\varphi|_{t=0} = \varphi_0; \quad \dot{\varphi}|_{t=0} = \dot{\varphi}_0; \quad \varphi|_{t=t_p} = \varphi_p; \quad \dot{\varphi}|_{t=t_p} = \dot{\varphi}_p. \quad (28)$$

Б) Визначимо закон руху $\varphi(t)$, за якого квадрат швидкості лінійного переміщення системи набуває мінімального значення при $t \in [0; t_p]$. При цьому необхідно задовольнити наступному критерію якості руху системи:

$$\int_0^{t_p} \dot{\varphi}^2(t) dt \Rightarrow \min. \quad (29)$$

Враховуючи (1), критерій (29) можна подати у наступному вигляді:

$$\frac{1}{\mu^2} \cdot \int_0^{t_p} [P(t) \cdot \cos \theta(t) - \omega^2 \cdot \varphi - \ddot{\varphi}]^2 dt \Rightarrow \min. \quad (30)$$

Рівняння Ейлера-Пуассона для критерію (30) має вид:

$$\overset{(IV)}{\varphi} + 2 \cdot \omega^2 \cdot \ddot{\varphi} + \omega^2 \cdot \varphi = \omega^2 \cdot [P(t) \cdot \cos \theta(t)] + \frac{d^2}{dt^2} \cdot [P(t) \cdot \cos \theta(t)]. \quad (31)$$

Розв'язок (31) має вид:

$$\varphi(t) = C_1 \cdot \cos \omega t + C_2 \cdot \sin \omega t + C_3 \cdot t \cdot \cos \omega t + C_4 \cdot t \cdot \sin \omega t + \tilde{\varphi}_{\text{част.}}(t), \quad (32)$$

де $\tilde{\varphi}_{\text{част.}}(t)$ – частинний розв’язок (32); $C_i, i = \overline{(1,4)}$ – константи, що визначаються з умов (28).

В) Визначимо закон руху $\varphi(t)$, за якого квадрат прискорення лінійного переміщення системи набуває оптимального значення при $t \in [0; t_p]$. При цьому необхідно задовольнити наступному критерію якості руху системи:

$$\int_0^{t_p} (\ddot{\varphi}(t))^2 dt \Rightarrow \min. \quad (33)$$

Критерій (33) можна подати у вигляді:

$$\int_0^{t_p} [P(t) \cdot \cos \theta(t) - \mu \cdot \dot{\varphi} - \omega^2 \varphi]^2 dt \Rightarrow \min. \quad (34)$$

Рівняння Ейлера-Пуассона для критерію (34) має вид:

$$\mu^2 \cdot \ddot{\varphi} - \omega^4 \cdot \varphi = \mu \cdot \frac{d}{dt} [P(t) \cdot \cos \theta(t)] - \omega^2 \cdot [P(t) \cdot \cos \theta(t)]. \quad (35)$$

Розв’язок (35) має вид:

$$\varphi(t) = C_1 \cdot \exp\left\{\frac{\omega^2}{\mu} \cdot t\right\} + C_2 \cdot \exp\left\{-\frac{\omega^2}{\mu} \cdot t\right\} + \tilde{\varphi}_{\text{част.}}(t), \quad (36)$$

де $\tilde{\varphi}_{\text{част.}}(t)$ – частинний розв’язок (36); $C_i, i = \overline{(1,2)}$ – константи, що визначаються з початкових умов типу (3).

Г) Визначимо закон руху $\varphi(t)$ для комплексного критерію якості вказаного руху, коли при $t \in [0; t_p]$ сума квадратів $\varphi(t)$, $\dot{\varphi}(t)$ та $\ddot{\varphi}(t)$ (кожний квадрат з певним ваговим коефіцієнтом) набуває найменшого значення. Для цього слід спочатку зробити безрозмірними всі величини, що входять до складу такого критерію.

Використовуючи запис рівняння (1), введемо заміну: $\tau = \omega \cdot t$, $\bar{\varphi} = \frac{\varphi}{A}$, де A – амплітуда лінійного переміщення. Крім того, вважаємо,

що $P(t) = P_0$, а $\frac{P_0}{\omega^2 \cdot A} = 1$, $\theta(t) = \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2} = \frac{\varepsilon \cdot \tau^2}{2 \cdot \omega^2}$. Тоді рівняння (1)

можна подати у наступному вигляді:

$$\bar{\varphi}_{2\tau} + \frac{\mu}{\omega} \cdot \bar{\varphi}_{\tau} + \bar{\varphi} = \cos\left(\frac{\varepsilon \cdot \tau^2}{2 \cdot \omega^2}\right). \quad (37)$$

Для скорочення запису введемо позначення для правої частини

$$(37): \cos\left(\frac{\varepsilon \cdot \tau^2}{2 \cdot \omega^2}\right) = I(t) = I(\tau).$$

Запис рівняння (1) у вигляді (37) є безрозмірним. Ця обставина дозволяє визначити кожний з доданків лівої частини (37) через всі інші доданки, а вагові коефіцієнти у критерії оптимальності руху системи вважати рівними одиниці, тобто:

$$\int_0^{\tau_p} \{(\bar{\varphi}_{2\tau})^2 + (\bar{\varphi}_\tau)^2 + (\bar{\varphi})^2\} d\tau \Rightarrow \min, \quad (38)$$

де $\tau_p = \omega \cdot t_p$, t_p – тривалість розгону системи (тривалість перехідного режиму руху).

Опускаючи неважкі, але громіздкі перетворення, можна для критерію (38) оптимальності руху механічної системи записати наступне рівняння Ейлера-Пуассона:

$$\bar{\varphi}_{4\tau} + 2 \cdot \frac{(\omega^2 - \mu^2)}{\omega^2} \cdot \bar{\varphi}_{2\tau} + \bar{\varphi} = I(\tau) + I_{2\tau}(\tau) - \frac{2 \cdot \frac{\mu}{\omega} \cdot I_\tau(\tau)}{\left(1 + \frac{\omega^2}{\mu^2}\right)}. \quad (39)$$

Оскільки зазвичай $\omega \gg \mu$, тоді з (39) матимемо:

$$\bar{\varphi}_{4\tau} + 2 \cdot \bar{\varphi}_{2\tau} + \bar{\varphi} = I(\tau) + I_{2\tau}(\tau). \quad (40)$$

Зазначимо, що $I_{2\tau}(\tau)$ має наступний вигляд:

$$I_{2\tau}(\tau) = -\frac{\varepsilon}{\omega^2} \cdot \sin\left(\frac{\varepsilon \cdot \tau^2}{2 \cdot \omega^2}\right) - \frac{\varepsilon^2 \cdot \tau^2}{\omega^4} \cdot \cos\left(\frac{\varepsilon \cdot \tau^2}{2 \cdot \omega^2}\right). \quad (41)$$

Враховуючи позначення $I(\tau)$ можемо (40) записати так:

$$\bar{\varphi}_{4\tau} + 2 \cdot \bar{\varphi}_{2\tau} + \bar{\varphi} = \left(1 - \frac{\varepsilon^2 \cdot \tau^2}{\omega^4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\varepsilon \cdot \tau^2}{2 \cdot \omega^2}\right) - \frac{\varepsilon}{\omega^2} \cdot \sin\left(\frac{\varepsilon \cdot \tau^2}{2 \cdot \omega^2}\right). \quad (42)$$

Чисельні розрахунки $\varphi(\tau)$, $\varphi_\tau(\tau)$, $\varphi_{2\tau}(\tau)$, $\varphi_{3\tau}(\tau)$ та $\varphi_{4\tau}(\tau)$ були проведені та побудовані відповідні графіки для восьми варіантів значень вихідних параметрів механічної системи: $\frac{\varepsilon}{\omega^2} = 0,1$ – рис. 1;

$\frac{\varepsilon}{\omega^2} = 1$ – рис. 2; $\frac{\varepsilon}{\omega^2} = 10$ – рис. 3.

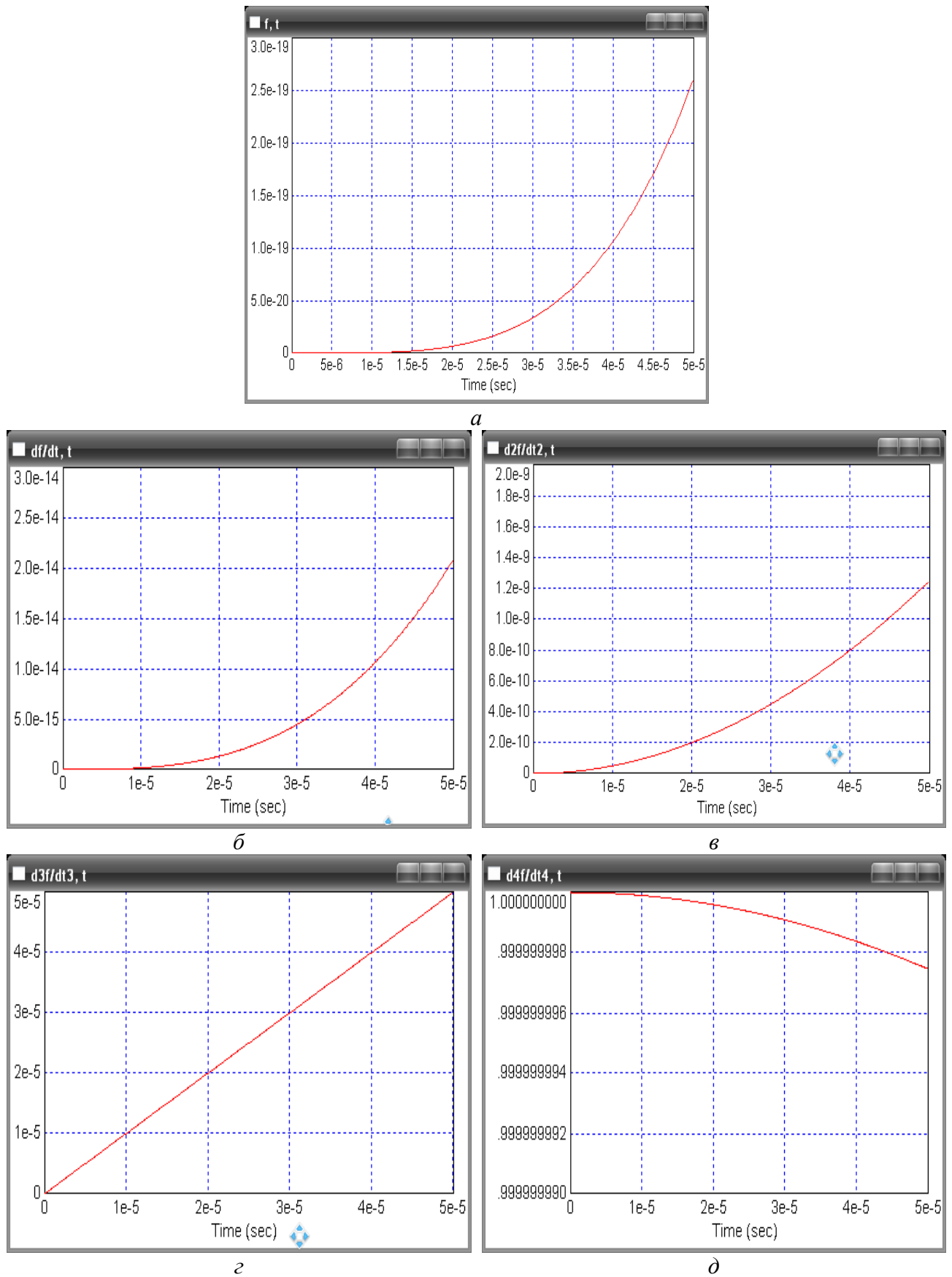
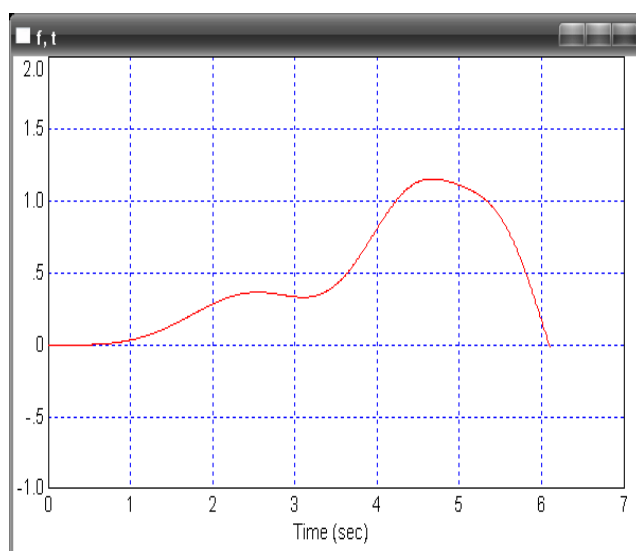
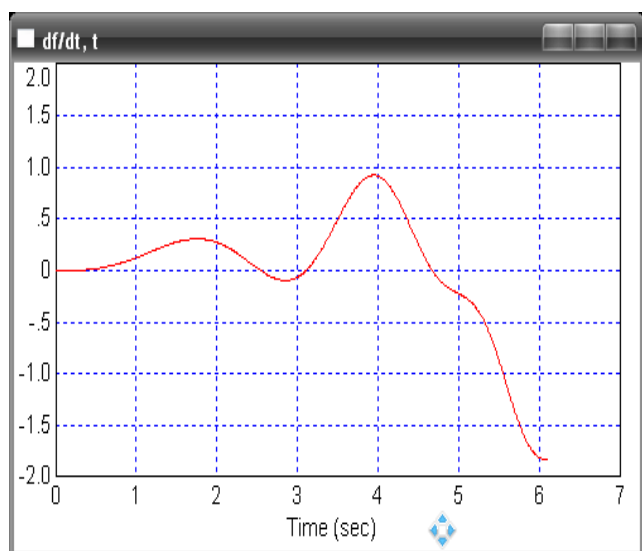


Рис. 1. Графіки зміни вихідних параметрів механічної системи при $\frac{\varepsilon}{\omega^2} = 0,1$:

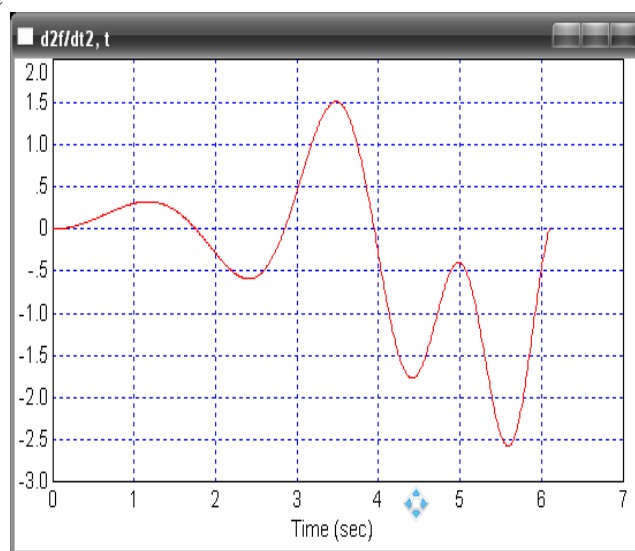
$$\varphi(\tau) - a; \varphi_{\tau}(\tau) - b; \varphi_{2\tau}(\tau) - c; \varphi_{3\tau}(\tau) - d; \varphi_{4\tau}(\tau) - e$$



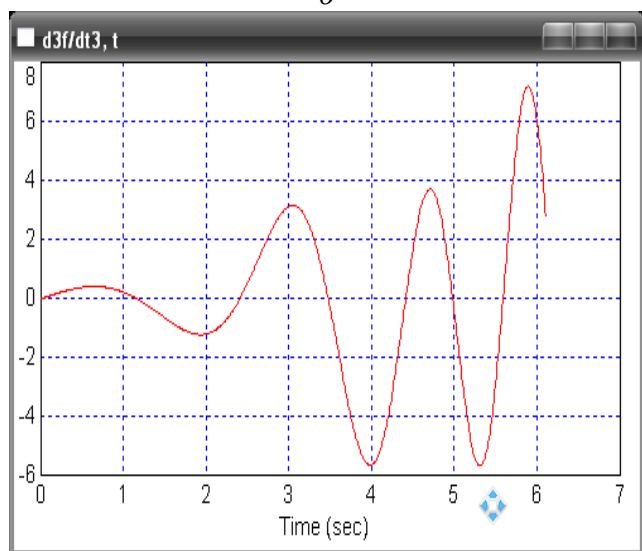
a



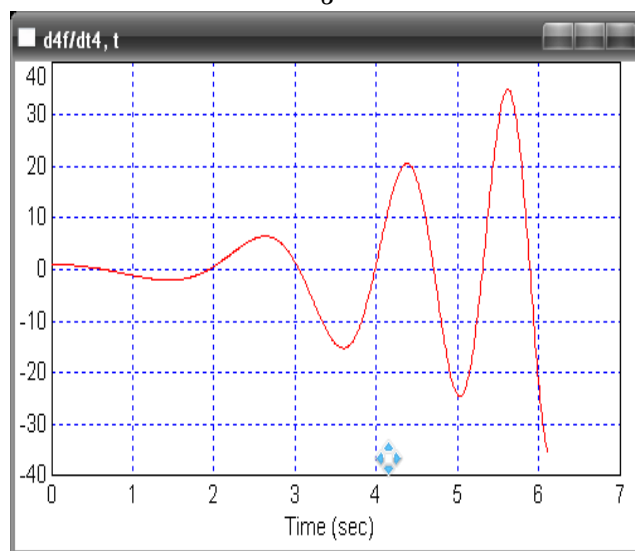
б



в



г



д

Рис. 2. Графіки зміни вихідних параметрів механічної системи при $\frac{\varepsilon}{\omega^2} = 1$:

$$\varphi(\tau) - a; \varphi_{\tau}(\tau) - б; \varphi_{2\tau}(\tau) - в; \varphi_{3\tau}(\tau) - г; \varphi_{4\tau}(\tau) - д$$

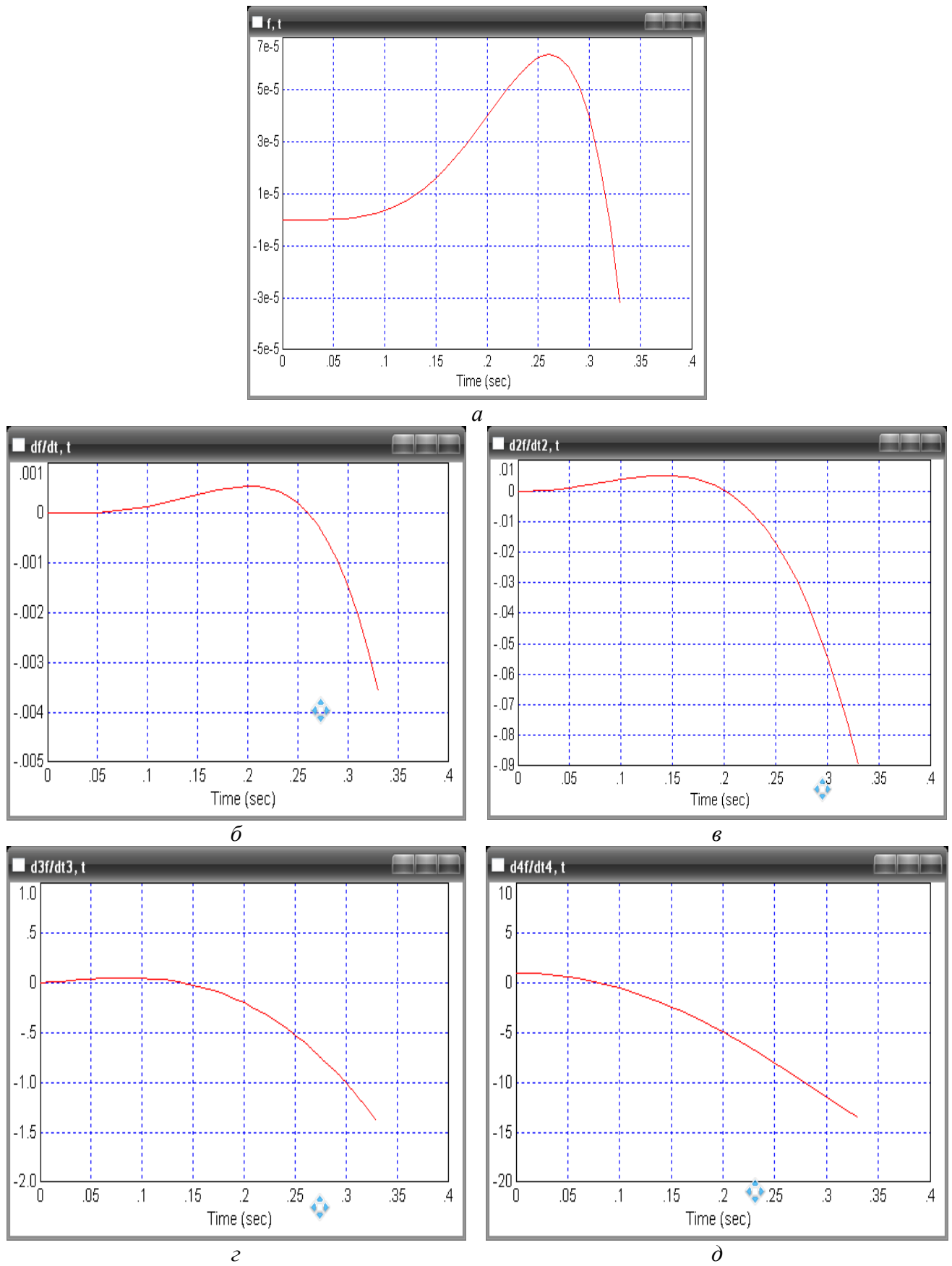


Рис. 3. Графіки зміни вихідних параметрів механічної системи при $\frac{\varepsilon}{\omega^2} = 10$:

$$\varphi(\tau) - a; \varphi_{\tau}(\tau) - б; \varphi_{2\tau}(\tau) - в; \varphi_{3\tau}(\tau) - г; \varphi_{4\tau}(\tau) - д$$

Аналіз графіків на рис. 1-3 показує, що при зміні кутового прискорення ε (при збільшенні на порядок) відбуваються наступні зміни: графік a ($\varphi(\tau)$) – з'являються додаткові локальні максимуми; у графіках всіх похідних (з першої по четверту включно) з'являються осциляції (коливання). Причому із збільшенням ε при постійних значеннях інших параметрів зростає частота і амплітуда осциляції. При подальшому збільшенні відношення $\frac{\varepsilon}{\omega^2}$ від 1 до 10 осциляції зникають і всі графіки стають гладкими функціями часу.

Отже, це означає необхідність якомога швидше проходити резонанс системи. При цьому осциляції можна зменшити, а потім і взагалі уникнути.

Висновки.

1. У роботі встановлено критерії та оптимальні режими руху лінійних механічних систем з одним ступенем вільності руху при їх переході через резонанс в умовах нестационарних коливань механічних систем.

2. Отримано розрахункові формули для визначення швидкості проходження через резонанс та тривалості перехідного процесу у механічній системі з різними видами навантаження.

3. Встановлено, що для зменшення осциляції в системі (або взагалі їх уникнення) резонанс системи необхідно проходити якомога швидше.

Список літератури

1. Ловейкін В.С. Оптимізація перехідних режимів руху механічних систем прямим варіаційним методом: монографія / В.С. Ловейкін, Ю.О Ромасевич. – К.: Ніжин: Видавець ПП Лисенко М.М., 2010. – 184 с.
2. Голоскоков Е.Г. Нестационарные колебания механических систем / Е.Г. Голоскоков, А.П. Филиппов. – К.: Наукова думка, 1966. – 336 с.
3. Ловейкин В.С. Расчёты оптимальных режимов движения механизмов строительных машин / В.С. Ловейкин. – К.: УМК ВО, 1990. – 168 с.
4. Григоров О.В. Оптимальное керування рухом механізмів вантажопідйомних машин / О.В. Григоров, В.С. Ловейкін. – К.: Віпол, 1997. – 264 с.
5. Моделювання динаміки механізмів вантажопідйомних машин / В.С. Ловейкін, Ю.В. Човнюк, М.Г. Діктерук и др. – К.-Миколаїв: Вид-во РВВ МДАУ, 2004. – 286 с.
6. А.М. Кац / Инженерный сборник. – 1947. – Т. 3. – С. 2.
7. Ловейкин В.С. Оценка движения механизмов и машин / В.С. Ловейкин // Подъемно-транспортное оборудование. – К.: Техника, 1989. – С. 16-18.
8. Артоболовский И.И. Теория механизмов и машин / И.И. Артоболовский. – М.: Наука, 1975. – 640 с.
9. Математические основы теории автоматического регулирования / В.А. Иванов и др. – М.: Высшая школа, 1971. – 808 с.

10. Методы классической и современной теории автоматического управления: учеб. в 3-х т. / под ред. Н.Д. Егупова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – Т. 2. Синтез регуляторов и теория оптимизации систем автоматического управления. – 736 с.
11. Zheng Dazhong. Linear System Theory (Second Edition) / Zheng Dazhong. – Beijing: TUP, 2000. – 706 p.
12. Чанцин Ван. Структурное представление непрерывных линейных динамических систем / Ван Чанцин, Гуо Ниншен // Естественные и технические науки. – 2005. – № 1. – С.131-134.
13. Теория автоматического управления / под ред. А.В. Нетушила. – М.: Высшая школа, 1968. – Ч. I. – 424 с.
14. Теория автоматического управления / под ред. А.В. Нетушила. – М.: Высшая школа, 1972. – Ч. II. – 430 с.
15. Бесекерский В.А. Теория систем автоматического регулирования / В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. – М.: Наука, 1972. – 450 с.
16. Anderson B.D.O. Linear Optimal Control (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall) / Anderson B.D.O., and Moore J.V. – 1970.
17. Ловейкін В.С. Методи періодичної оптимізації у задачах керованого переміщення вантажів вантажопідійомними кранами: системи з несиметричними характеристиками / В.С. Ловейкін, Ю.В. Човнюк // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2002. – Т. 7. – № 1. – С. 32-36.

Стаття надійшла до редколегії 25.05.2011.

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Семенченко А.К.

В.С. Ловейкин, Ю.В. Човнюк, К.И. Почка, М.Г. Диктерук. Оптимизация параметров нестационарных колебаний линейных механических систем при переходе через резонанс. Установлены критерии и оптимальные режимы движения линейных механических систем с одной степенью свободы движения при их переходе через резонанс в условиях нестационарных колебаний механических систем.

Ключевые слова: оптимизация, режим движения, резонанс, нестационарные колебания.

V. Loveykin, Y. Chovnyuk, K. Pochka, M. Dykteruk. Optimization of Parameters of the Line Mechanical Systems' Unsteady Oscillations at their Transition over the Resonance. The criteria and optimal modes of movement of the line mechanical systems with one step freedom of movement at their transition over the resonance under the mechanical systems' unsteady oscillations were defined.

Keywords: optimization, mode of movement, resonance, unsteady oscillations.

© Ловейкін В.С., Човнюк Ю.В., Почка К.І., Діктерук М.Г., 2012