УДК 621.923

Е. С. Сергеечева, студент
С. А. Поезд, аспирант
Л. П. Калафатова, проф., д-р техн. наук
Донецкий национальный технический университет, ул. Артема, 58, г. Донецк, Украина

ОБОСНОВАНИЕ ВЫБОРА МЕТОДА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ МОДЕЛИ ПЛОСКОГО ШЛИФОВАНИЯ СИТАЛЛОВ ПЕРИФЕРИЕЙ КРУГА

Знание закономерностей распределения температурных полей в малоисследованных материалах, таких как ситаллы, позволяет повысить производительность обработки без ущерба точности и качеству обработанных деталей.

Изучить температурное поле - значит найти пространственно-временное распределение температуры в изучаемой детали, т.е. определить функцию вида:

$$T = f(x, y, z, t) \tag{1}$$

где x, y, z - координаты рассматриваемой точки тела, t – время.

В теории теплопередачи принято считать, что конвективный перенос тепла существует только в жидкостях и газах. Однако, если учесть, что при шлифовании приходится иметь дело с движущимся источником тепла (шлифовальным кругом), то в системе координат, связанной с таким источником, перенос тепла будет осуществляться не только за счет теплопроводности, но и за счет движения самой нагретой среды. Таким образом, при шлифовании осуществляется частный случай конвекции, при котором все элементы нагретой среды движутся с одинаковой скоростью.

С учетом того, что ось z совпадает с направлением движения источника, уравнение теплопроводности имеет вид [1]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c \cdot \gamma}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + v\frac{\partial T}{\partial z} \tag{2}$$

Коэффициент $a = \dfrac{\lambda}{c \cdot \gamma}$ - коэффициент температуропроводности (см. ур-е 2), является важнейшим теплофизическим параметром вещества. Этот коэффициент характеризует скорость изменения температуры, и в системе СИ имеет размерность *м*^{2}*/с*.

Дифференциальное уравнение теплопроводности является математической моделью целого класса явлений теплопроводности и само по себе не отражает развитие процесса теплопереноса в рассматриваемом теле. Математически это объясняется не единственностью решения дифференциальных уравнений в частных производных, к которым относится и уравнение теплопроводности. Чтобы получить из множества решений одно частное решение, соответствующее определенной конкретной задаче, необходимо иметь дополнительные данные, не содержащиеся в исходном дифференциальном уравнении теплопроводности.

Для однозначного решения тепловой задачи необходимо учитывать следующее.

1. Геометрию твердого тела, в котором протекает процесс теплообмена.
2. Граничные условия, характеризующие особенности теплового взаимодействия граничной поверхности тела с окружающей средой.
3. Временные (начальные) условия, характеризующие состояние тела в исходный момент времени.

Граничные условия бывают нескольких видов (родов): граничное условие первого рода задает распределение температуры на границе области в любой момент времени; граничное условие второго рода задает плотность теплового потока для каждой точки граничной поверхности в любой момент времени; граничное условие третьего рода задает теплообмен на границе области с окружающей средой; граничное условие четвертого рода выражает равенство тепловых потоков на границе раздела двух теплопроводящих сред.

Для полного описания вида температурного поля в обрабатываемой детали простой формы достаточно рассмотреть решение двухмерной задачи.

При плоском шлифовании зона контакта абразивного круга с деталью представляет собой прямоугольник, длина которого равна высоте шлифовального круга, а ширина определяется по глубине шлифования и диаметру круга. Зону контакта круга с деталью будем рассматривать в виде сплошной бесконечно длинной полосы, так как реальная ограниченность зоны контакта никак не повлияет на распределение температуры на ее средних участках. Расчетная схема представлена на рисунке.

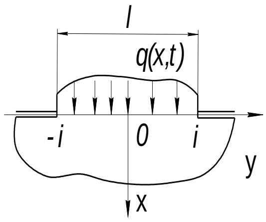

Рисунок – Расчетная схема для решения плоской задачи теплопроводности

Для решения задачи теплопроводности в двухмерном пространстве необходимо решить дифференциальное уравнение следующего вида:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c \cdot \gamma}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + v\frac{\partial T}{\partial z} \quad (3);$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0, y, t) = -\frac{q(y,t)}{\lambda}, |y| < l \quad (5);$$

$$T(x, y, 0) = T_c \quad (4);$$

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial x}(0, y, t) + \gamma(T - T_c) = 0, |y| > l \quad (6),$$

где T_c – температура окружающей среды, q – плотность теплового потока, l – длинна контакта.

Краевые задачи теплопроводности решаются самыми разнообразными методами, как аналитическими, так и числовыми. Среди аналитических методов наиболее используемые – метод Фурье, метод интегральных преобразований, метод функций Грина (метод источников). Из численных – метод конечных разностей и метод конечных элементов. Считается, что аналитические методы обладают большей математической строгостью и точностью, в связи с чем и более предпочтительны. Однако и аналитические методы решения связаны с использованием численных методов. В фундаментальной работе [2] при представлении источника тепла в виде бесконечно длинной полосы шириной *2h* функция, описывающая температурное поле, создаваемое таким источником, представлена в виде

$$T = \frac{qa}{\pi\lambda v}\int_{Z-H}^{Z+H} \exp(-\xi) K_0\left(\sqrt{X^2 + \xi^2}\right) d\xi . \quad (7)$$

Интеграл описывает температурное поле источника, движущегося в бесконечной теплоотводящей среде. При решении выражения (7) используются табулированные значения интеграла $J(u) = \int_0^u exp(-\zeta) K_0\left(\sqrt{X^2 + \xi^2}\right) d\xi$, с помощью приведения к известным интегральным представлениям модифицированной функции Бесселя второго ряда нулевого порядка.

Так как и при аналитическом вычислении присутствует погрешность вычисления, то, в силу все продолжающейся тенденции развития цифровых систем исчисления, актуально применение численных методов решения задачи.

Представленная задача решалась методом конечных элементов с использованием пакета твердотельного моделирования ANSYS.

Библиографический список

1. Усов А. В., Дубров О. М. Дмитришин Д. В. Моделювання систем з розподіленими параметрами: Монографія. – Одеса: Астропринт, 2002. – 664с.

2. Сипайлов В. А. Тепловые процессы при шлифовании и управление качеством поверхности. – М.: Машиностроение, 1978 – 167 с.