К.ф-м.н. Галиахметов А.М., Шилкин В.А.

Донецкий национальный технический университет, Украина

Кручение, порождаемое идеальной жидкостью, и модель типа Геделя

Среди проблем современной космологии неослабевающий интерес привлекает проблема возможного вращения Вселенной. Этой теме было посвящено большее число публикаций (см. обзор [1] и исчерпывающий список ссылок, приведенных там). Следует отметить, что большинство точных решений для космологических моделей с вращением было получено в рамках общей теории относительности (ОТО). Вместе с тем, общеизвестно, что проблемы ОТО и стандартного космологического сценария стимулировали разработку других общерелятивистских теорий гравитации. В актуальном варианте пуанкаре калибровочной теории гравитации – теории Эйнштейна-Картана (ТЭК), в которой пространство обладает не только кривизной, но и кручением, удалось достичь некоторого прогресса в устранении трудностей ОТО (см., например, [2-5]).

В работе в рамках ТЭК исследуются однородные космологические модели с вращением, заполненные двумя идеальными жидкостями, одна из которых является источником кручения.

Лагранжиан модели L выбираем [6] в виде суммы лагранжианов: гравитационного – L_g, идеальных жидкостей – $L_{fl(1)}$ и $L_{fl(2)}$:

$$L_g = -R(\Gamma)/2æ, \tag{1}$$

$$L_{fl(1)} = -\rho(1+\Pi(\rho,e)) + k\overset{\Gamma}{\nabla}_i(\rho u^i) + k_1(u_i u^i - 1) + k_2 u^i \partial_i X + k_3 u^i \partial_i e. \tag{2}$$

Здесь $R(\Gamma)$ – скалярная кривизна связности $\Gamma^k_{ij} = \left\{ {k \atop ij} \right\} + S_{ij\bullet}^{\ \ k} + 2S^k_{\bullet(ij)}; \left\{ {k \atop ij} \right\}$ - символы Кристоффеля 2-го рода; $S_{ij\bullet}^{\ \ k} = \Gamma^k_{[ij]}$ - тензор кручения; $æ = 8\pi G$ – гравитационная постоянная Эйнштейна; ρ – плотность массы жидкости; $\Pi(\rho,e)$ – её внутренняя энергия; k, k_1, k_2, k_3– лагранжевы множители; X – лагранжевы координаты частиц материи, e – удельная энтропия; u^i – 4-скорость; $\overset{\Gamma}{\nabla}_i$– ковариантный оператор в пространстве-времени Римана-Картана. Лагранжиан $L_{fl(2)}$ для идеальной жидкости не выписан, так как для него, в производной члена, регулирующего сохранение числа частиц, нет вектора кручения.

Метрический тензор g_{ik} имеет сигнатуру (– , – , – , +), а тензоры Римана и Риччи определяются как $R_{ijk\bullet}^{\ \ \ \ m} = \partial_i\Gamma^m_{jk} - \partial_j\Gamma^m_{ik} + \Gamma^m_{ip}\Gamma^p_{jk} - \Gamma^m_{jp}\Gamma^p_{ik}$, $R_{jk} = R_{ijk\bullet}^{\ \ \ \ i}$. Из (2) следует, что кручение может взаимодействовать с идеальной жидкостью только через свой след $S_i = S_{ik\bullet}^{\ \ \ k}$ (вектор кручения). Следовательно, скаляр кривизны $R(\Gamma)$ представляется в виде:

$$R(\Gamma) = R(\{\ \}) + 4S^k_{\ ;k} - \frac{8}{3}S_kS^k, \qquad (3)$$

где $R(\{\ \})$ – скаляр кривизны риманова пространства; точка с запятой означает ковариантную производную в пространстве Римана.

Варьируя действие с лагранжианом $L=L_g+L_{fl(1)}+L_{fl(2)}$ по g_{ij}, S_k, ρ, k, k_i, X, e, u^i получим совместную систему уравнений для гравитационных полей и материи:

$$\text{a)}\ G_{ij}(\{\ \}) = æ(T^{fl(1)}_{ij} + T^{fl(2)}_{ij}) + \Lambda_{ij}, \quad \text{в)}\ S^k = \frac{3æ}{4}\Theta u^k,$$

$$\text{c)}\ \varepsilon_{fl(1)} + P_{fl(1)} + \rho u^i(\partial_i + 2S_i)k = 0, \qquad \text{d)}\ \overset{\Gamma}{\nabla}_i(\rho u^i) = 0,$$

$$\text{e)}\ u_iu^i = 1, \qquad \text{f)}\ u^i\partial_iX = 0, \quad \text{g)}\ u^i\partial_ie = 0, \quad \text{h)}\ (k_2u^i)_{;i} = 0,$$

$$\text{i)}\ \partial\varepsilon_{fl(1)}/\partial e + (k_3u^i)_{;i} = 0, \quad \text{j)}\ -\rho\partial_ik - 2k\rho S_i + 2k_1u_i + k_2\partial_iX + k_3\partial_ie = 0, \quad (4)$$

где

$$T^{fl(1)}_{ij} = (\varepsilon_{fl(1)} + P_{fl(1)})u_iu_j - P_{fl(1)}g_{ij}, \quad T^{fl(2)}_{ij} = (\varepsilon_{fl(2)} + P_{fl(2)})u_iu_j - P_{fl(2)}g_{ij},$$

$$\Lambda_{ij} = \frac{8}{3}S_iS_j - \frac{4}{3}S_kS^kg_{ij}, \quad \varepsilon_{fl(1)} = \rho(1 + \Pi(\rho, e)), \quad P_{fl(1)} = \rho^2\partial\Pi/\partial\rho. \qquad (5)$$

Здесь ε_{fl}, P_{fl} – плотность энергии и давление жидкости; $\Theta = k\rho$.

Сворачивая уравнение (j) системы (4) с u^i и учитывая соотношения (c), (e), (f) и (g), получим:

$$2k_1 = -(\varepsilon_{fl(1)} + P_{fl(1)}). \tag{6}$$

Из уравнения (c) и (d) системы (4) следует:

$$(\Theta u^i)_{;i} = -(\varepsilon_{fl(1)} + P_{fl(1)}). \tag{7}$$

Исключая кручение с помощью уравнения (в), получаем замкнутую подсистему из уравнений (a) (системы(4)) и уравнения (7), которая описывает в рамках ОТО гравитационное взаимодействие двух идеальных жидкостей.

Для описания вращения Вселенной в работе [7] была предложена метрика

$$ds^2 = -a^2(dx^2 + ke^{2\lambda x}dy^2 + dz^2) - 2be^{\lambda x}dydt + dt^2. \tag{8}$$

Здесь $a(t)$, $b(t)$ – масштабные факторы; k и λ – постоянные; для $k < 0$ замкнутые времениподобные кривые проходят через каждую точку пространства – времени, а для $k > 0$ точные кривые отсутствуют, и причинность восстанавливается. Параметр λ определяет интенсивность вращения, так как угловая скорость ω вращения системы отсчета, сопутствующей материи, для метрики (8) определяется формулой [7]

$$\omega = \frac{\lambda b}{2a\sqrt{ka^2 + b^2}} \tag{9}$$

Среди космологических моделей с вращением особое место занимает модель типа Геделя [8]. Эта стационарная модель получена для идеальной жидкости без давления и допускает существование замкнутых времениподобных кривых. Следует отметить, что в оригинальной работе Геделя [8] учитывалась космологическая постоянная Λ. В работе [9] было показано, что в стационарных пространствах для идеальной жидкости, которая является источником кручения, допустимо лишь вакуумное уравнение состояния

$$P_{f\ell(1)} = -\varepsilon_{f\ell(1)}, \qquad \varepsilon_{f\ell(1)} = C_1 = \mathrm{const}. \tag{10}$$

Следовательно, при наличии такой идеальной жидкости нет необходимости в дополнительном учете космологического члена Λ в лагранжиане модели, так как его аналог уже присутствует в выражении для $L_{f\ell(1)}$.

Легко видеть, что для $a(t) = b(t) = 1$, $k = -1/2$ метрика (8) переходит в метрику Геделя, причем, $\omega = \lambda/\sqrt{2}$.

С учетом (10) из (7) получим

$$\Theta = \frac{C_\Theta}{a^2\sqrt{ka^2 + b^2}} = \sqrt{2}C_\Theta, \tag{11}$$

где $C_\Theta > 0$ - постоянная интегрирования.

Для второй идеальной жидкости, как у Геделя, полагаем $P_{f\ell(2)} = 0$. Используя выражения для ненулевых компонент тензора Эйнштейна $G_{ij}(\{\ \})$ для метрики (8), выписанных в работе [10], нетрудно показать, что система независимых уравнений Эйштейна имеет вид

$$3\omega^2 = 2æ\varepsilon_{f\ell(2)} + æC_1 + \frac{9}{2}æ^2C_\Theta^2 . \tag{12}$$

$$\omega^2 = æ\varepsilon_{f\ell(2)} + æC_1 + \frac{3}{2}æ^2C_\Theta^2 . \tag{13}$$

Отсюда следует, что

$$\varepsilon_{f\ell(2)} = -2C_1. \tag{14}$$

Ввиду того, что $C_1 > 0$, имеем $\varepsilon_{f\ell(2)} < 0$.

Следовательно, жидкость с вакуумным уравнением состояния, которая является источником кручения, в присутствии пылевой материи не может индуцировать метрику Геделя.

Литература:

1. Obukhov Yu. N., in : *Colloquim on Cosmic Rotation* (Berlin, Feb. 1998), Fds. M. Scherfner, T. Chrobok, and M. Shefaat (Wissenschaft und Technik Verlag : Berlin, 2000), p. 23; astro − ph/0008106.

2. Иваненко Д.Д., Пронин П.И., Сарданашвили Г.А. Калибровочная теория гравитации. – М.: Изд-во МГУ, 1985.

3. Пономарев В.Н., Барвинский А.О., Обухов Ю.Н. Геометродинамические методы и калибровочный подход к теории гравитации. – М.: Энергоатомиздат, 1985.

4. Кречет В.Г. Проблемы гравитационного взаимодействия физических полей в пространствах аффинной связности: Автореф. дис., … д-ра физ. − мат. наук – Ярославль, 1984.

5. Галиахметов А.М. // Укр. физ. журн. – 1993. – v. 38. − №6. – С. 807 – 814; 1994. – v. 39. − №11 − 12. – С. 1029 – 1032.

6. Кречет В.Г., Мельников В.Н. //Изв. вузов. Физика – 1991. – т.34. − №2 – С. 75 – 79.

7. Кречет В.Г. // Изв. вузов. Физика. – 2005. – т. 48. − № 3. – С. 3 − 6.

8. Gödel K // Rev. Mod. Phys. – 1949 . – v. 21. – P. 447 − 450.

9. Galiakhmetov A.M. // Gravitation and Cosmology. − 2001. – v.7. – № 1. − P. 33 – 36.

10. Galiakhmetov A.M. // Gravitation and Cosmology. − 2009. – v.15. – № 3. − P. 250 – 255.