К.ф-м.н. Галиахметов А.М., Уколов А.И., Шилкин В.А.

Донецкий национальный технический университет, Украина

Анизотропная модель с двумя источниками кручения в теории Эйнштейна-Картана

В рамках программы построения калибровочной теории гравитационных взаимодействий большую актуальность имеет Пуанкаре калибровочная теория гравитации и, в частности, ее простейший вариант – теория Эйнштейна – Картана (ТЭК). ТЭК опирается на пространства Римана – Картана, которые обладают не только кривизной, но и кручением. В этой теории удалось достичь некоторого прогресса в устранении трудностей в общей теории относительности (ОТО) (см., например, [1-4]).

В работе в рамках двухторсионной ТЭК, построенной в [5, 6], рассматриваются однородные анизотропные космологические модели с неминимально связанным духовым (ghost) скалярным полем (первый источник кручения) с нелинейным потенциалом и идеальной жидкостью, которая является вторым источником кручения.

Лагранжиан модели L выбираем в виде суммы лагранжианов: гравитационного – L_g, скалярного поля – L_s и идеальной жидкости – L_{fl}:

$$L_g = -R(\Gamma)/2æ, \tag{1}$$

$$L_s = -(1/4\pi)\left\{(1/2)\left[\Phi,_\kappa \Phi^{,\kappa} + \xi R(\Gamma)\Phi^2\right] + V(\Phi)\right\}, \tag{2}$$

$$L_{fl} = -\rho(c^2 + \Pi(\rho,e)) + k\overset{\Gamma}{\nabla}_i(\rho u^i) + k_1(u_i u^i - 1) + k_2 u^i \partial_i X + k_3 u^i \partial_i e. \tag{3}$$

Здесь $R(\Gamma)$ – скалярная кривизна связности $\Gamma^{\mathrm{k}}_{\mathrm{ij}} = \{^{k}_{ij}\} + S_{ij\bullet}^{\ \ k} + 2S^{k}_{\bullet(ij)}$; $\{^{\mathrm{k}}_{\mathrm{ij}}\}$ - символы Кристоффеля 2-го рода; $S_{ij\bullet}^{\ \ k} = \Gamma^{\mathrm{k}}_{[\mathrm{ij}]}$ - тензор кручения; $æ = 8\pi G$ – гравитационная постоянная Эйнштейна; ξ – постоянная неминимальной связи; $V(\Phi)$ – потенциал скалярного поля; ρ – плотность массы жидкости; $\Pi(\rho,e)$ – её внутренняя энергия; k, k_1, k_2, k_3 – лагранжевы множители; X – лагранжевы координаты частиц материи; e – удельная энтропия [7]; u^i – 4-скорость; $\overset{\Gamma}{\nabla}_i$ – ковариантный оператор в пространстве-времени Римана-Картана.

Отметим, что уравнение скалярного поля, соответствующее лагранжиану (2) в отсутствие кручения при $\xi = 1/6$ и $V(\Phi) = 0$ будет конформно-инвариантным, а при $\xi = -1/6$, и $V(\Phi) = -(\mu^2/2)\Phi^2$ соответствует аксионному полю в ОТО [8], которое может быть ответственно за скрытую массу Вселенной.

Замкнутая подсистема уравнений, которая описывает в рамках ОТО гравитационное взаимодействие идеальной жидкости и неминимально связанного скалярного поля с потенциалом $V(\Phi)$, соответствующая лагранжиану $L = L_g + L_s + L_{fl}$, имеет вид:

$$G_{ij}(\{\}) = æ\left(T_{ij}^{fl} + T_{ij}^{s}\right) + \Lambda_{ij}, \tag{4}$$

$$\left(\Theta u^i\right)_{;i} = -\left(\varepsilon_{fl} + P_{fl}\right), \tag{5}$$

$$g_{ik}\nabla^i\nabla^k\Phi - \xi\Phi R(\Gamma) - V' = 0, \tag{6}$$

где

$$T_{ij}^{fl} = \left(\varepsilon_{fl} + P_{fl}\right)u_i u_j - P_{fl}g_{ij}, \quad \varepsilon_{fl} = \rho\left(c^2 + \Pi(\rho, e)\right), \; P_{fl} = \rho^2\partial\Pi/\partial\rho,$$

$$T_{ij}^{s} = -(1/4\pi)\left\{\Phi_{,i}\Phi_{,j} - (1/2)\left[\Phi_{,m}\Phi^{,m} + \xi R(\{\})\Phi^2 + 2V(\Phi)\right]g_{ij} + \xi\left[-2S_i\nabla_j\right.\right.$$
$$\left.\left. - 2S_j\nabla_i + 2g_{ij}S^n\nabla_n - \nabla_i\nabla_j + g_{ij}\nabla^2 + R_{ij}(\{\}) - \Lambda_{ij}\right]\Phi^2\right\},$$

$$\Lambda_{ij} = (8/3)S_iS_j - (4/3)S_\kappa S^\kappa g_{ij}, \qquad S^\kappa = (3/2)\psi\left(-2\pi\Theta u^k + \xi\Phi\Phi^{,\kappa}\right) \tag{7}$$

Здесь ε_{fl}, P_{fl} – плотность энергии и давление жидкости; ∇_i - ковариантная производная в римановом пространстве, $\psi = -æ\left(4\pi + \xi æ\Phi^2\right)^{-1}$; $\Theta = k\rho$; $V' = \partial V/\partial\Phi$.

В метрике однородной анизотропной модели типа I по Бианки

$$ds^2 = -a^2(t)dx^2 - b^2(t)dy^2 - c^2(t)^2dz^2 + dt^2 \tag{8}$$

для жидкости, которая является источником кручения, выбор вакуумного уравнения состояния $\left(P_{fl} = -\varepsilon_{fl}\right)$ приводит к соотношениям:

$$\varepsilon_{fl} = C_{fl}, \quad \Theta = C_\Theta\tau^{-1}, \quad \tau = abc, \qquad (C_{fl},\, C_\Theta = const,\, C_{fl} > 0). \tag{9}$$

Потенциал скалярного поля $V(\Phi)$ возьмём в виде:

$$V(\Phi) = -(\mu^2/2)\Phi^2 + (\lambda/4!)\Phi^4, \qquad (\mu, \lambda = const) \tag{10}$$

Из (4) следует

$$a(t) = (D_1^2 D_3)^{1/3}\tau^{1/3}\exp\left[(2x_1 + x_3)3^{-1}\int(\tau Z)^{-1}dt\right], \tag{11}$$

$$b(t) = (D_1^{-1} D_3)^{1/3}\tau^{1/3}\exp\left[(x_3 - x_1)3^{-1}\int(\tau Z)^{-1}dt\right], \tag{12}$$

$$c(t) = (D_1 D_3^2)^{-1/3}\tau^{1/3}\exp\left[-(x_1 + 2x_3)3^{-1}\int(\tau Z)^{-1}dt\right], \tag{13}$$

где D_1, D_3, x_1, x_3 - постоянные интегрирования, $Z = 4\pi + \xi æ\Phi^2$.

Нетрудно показать, что система полевых уравнений допускает первый интеграл

$$\tau\dot{\Phi}Z^{1/2} = C_1, \qquad C_1 > 0 \tag{14}$$

При наложении следующих условий $(\xi < 0)$

$$|\xi| < 3/2, \qquad \lambda = (6/\pi)æ^2\xi^2 C_{fl}, \qquad \mu^2 = 4æ|\xi|C_{fl},$$

$$(x_1^2 + x_1x_3 + x_3)(2/æC_1^2) - 3 + 2|\xi| + 72æ\pi^2(C_\Theta/C_1)^2 = 0. \tag{15}$$

получено точное частное решение

$$a_\mu(t) = a_{0\mu}(4\pi)^{-2/3}(1 + k^4t^2)^{2/3}\exp\left[A_\mu \arcsin\left(\frac{k^2|t|}{\sqrt{1 + k^4t^2}}\right)\right],$$

$$\tau = \frac{C_1}{4\pi}\sqrt{\frac{|\xi|}{3C_{fl}}}(1 + k^4t^2)^2, \qquad \Phi = \sqrt{\frac{4\pi}{æ|\xi|}}\frac{k^2|t|}{\sqrt{1 + k^4t^2}}, \tag{16}$$

где $\mu = 1,2,3,;\quad k^2 = \sqrt{3æC_{fl}}$,

$$a_{01}a_{02}a_{03} = 4\pi C_1\sqrt{\frac{|\xi|}{3C_{fl}}}, \qquad A_1 + A_2 + A_3 = 0. \tag{17}$$

Нетрудно видеть, что решение (16) описывает несингулярную модель, которая на поздних этапах эволюции ускоренно расширяется и изотропизуется по закону:

$$a(t) \sim \mathrm{b(t)} \sim \mathrm{c(t)} \sim \mathrm{t}^{4/3}. \tag{18}$$

Точные общие решения аналогичной задачи без учета потенциала скалярного поля и идеальной жидкости были получены в работе [9]. Было показано, что соответствующие модели несингулярны и асимптотически изотропизуются по экспоненциальному закону.

Таким образом, учет потенциала скалярного поля и второго источника кручения в виде идеальной жидкости приводит к изменению закона изотропизации.

Литература:

1. Иваненко Д.Д., Пронин П.И., Сарданашвили Г.А. Калибровочная теория гравитации. – М.: Изд-во МГУ, 1985.

2. Пономарев В.Н., Барвинский А.О., Обухов Ю.Н. Геометродинамические методы и калибровочный подход к теории гравитации. – М.: Энергоатомиздат, 1985.

3. Кречет В.Г. Проблемы гравитационного взаимодействия физических полей в пространствах аффинной связности: Автореф. дис., … д-ра физ. - мат. наук – Ярославль, 1984.

4. Галиахметов А.М. // Укр. физ. журн. – 1993. – v. 38. - №6. – С. 807 – 814; 1994. – v. 39. - №11-12. – С. 1029 – 1032.

5. Galiakhmetov A.M. // Gravitation and Cosmology. – 2001. – v.7. - № 1(25). - P. 33 – 36.

6. Galiakhmetov A.M. // Ukr. J.Phys. – 2001. – v.46. - № 12. – P. 1235 - 1238

7. Кречет В.Г., Мельников В.Н. //Изв. вузов. Физика – 1991. – т.34. - №2 – С. 75 – 79.

8. Krechet V.G., Sadovnikov D.V. // Gravitation and Cosmology. – 1997. – v.3. - № 2(10). - P. 133 – 140.

9. Galiakhmetov A.M. // Gravitation and Cosmology. – 2007. – v.13. - № 3(51). - P. 217 – 223.