УДК622.54.004

КИНЕМАТИКА ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ В ВОДООТЛИВНЫХ ЕМКОСТЯХ

Малеев В.Б., докт .техн. наук, проф, Холоша А.С., асс,
Малеев А.В., инж, Скорынин Н.И., канд .техн. наук, доц.
Донецкий национальный технический университет

Показано, что в шахтной воде, где средняя длина свободного пробега равна или больше размера частиц, следует ожидать движения со скольжением или свободномолекулярного.

It is shown that in mine water, where middle length of free run is equal or more of size of particles, it is necessary to expect motion with sliding or free.

Проблема и ее связь с научными или практическими задачами. При движении шахтной воды по водосборным канавкам, предварительным отстойникам и водосборникам, из нее непрерывно выпадают в осадок твердые частицы, тем самым уменьшая сечение этих емкостей и ухудшая условия движения воды, увеличивая объем тяжелого неквалифицированного ручного труда по удалению осевшего шлама. Поэтому при разработке современных средств и схем удаления твердых частиц из водосборных емкостей необходимо прежде всего рассмотреть динамику движения частиц, взвешенных в турбулентном потоке шахтной воды. Это позволит нам путем соответствующего обобщения методов механики сплошной среды расширить знания в области динамики многофазных систем, рассмотреть виды движения твердой частицы, обусловленные сопротивлением жидкости при непрерывном течении, течении его со скольжением.

Анализ исследований и публикаций. Анализ движения малой твердой частицы, взвешенной в турбулентном потоке, впервые выполнен Ченом [1]. Этот анализ нами далее изложен с включением соответствующих уточнений Хинце [2], Корсина и Ламли [3-5], а также Соу [6]. По мере необходимости на различных этапах формулирования и решения нами введены упрощающие предположения.

Изложение материала и результаты. Поскольку траектория частицы, обладающей инерцией, не обязательно совпадает с линией тока жидкости, необходимо рассмотреть две полные производные по времени:

для частицы

$$\frac{d}{dt_{\grave{o}}}=\frac{\partial}{\partial t}+U_{\grave{o}i}\frac{\partial}{\partial x_i}\,, \tag{1}$$

для жидкости

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+U_i\frac{\partial}{\partial x_i}\,, \tag{2}$$

где t - время, U_{Ti} -соответственно i-я компонента скорости частицы и жидкости, x_i - i-я пространственная координата.

Указанное различие относится не к особенностям турбулентности, а выражает общее свойство многофазных систем, состоящее в том, что траектории частиц не обязательно должны совпадать с линиями тока жидкости [6]. При формулировании уравнения движения нами приняты следующие допущения: частица имеет сферическую форму, а ее размер настолько мал, что сопротивление, возникающее при относительном движении частицы и жидкости, описывается законом Стокса; частица мала по сравнению с наименьшей длиной волны турбулентности и движением частицы, вызванным поперечным градиентом скорости, можно пренебречь. При анализе частицы сферической формы не нужно учитывать ее ориентацию. Предположение о малости частицы при общей формулировке задачи не является необходимым, так как если длина волны турбулентности меньше размера частицы, то это отражается на коэффициенте сопротивления. Однако, такое предположение позволяет пренебречь эффектом Магнуса в потоке с турбулентным поперечным сдвигом. Следуя вдоль траектории твердой частицы, можно получить общее уравнение движения с учетом эффектов, рассмотренных Бассе, Бусинеском и Озееном:

$$\frac{4\pi}{3}\grave{a}^3\rho_{\grave{o}}\frac{dU_{\grave{o}}}{dt_{\grave{o}}}=\frac{4\pi}{3}\grave{a}^3\rho_{\grave{o}}F(U-U_{\grave{o}})-\frac{4\pi}{3}\grave{a}^3\frac{\partial P}{dr}+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi}{3}\grave{a}^3\rho\frac{d}{dt_{\grave{o}}}(U-U_{\grave{o}})+6\grave{a}^3\sqrt{\pi\rho\mu}\int_{t_{\grave{o}0}}^{t_{\grave{o}}}\frac{(d/d\tau)(U-U_p)}{\sqrt{t_{\grave{o}}-\tau}}d\tau+F_e\,, \tag{3}$$

здесь U и U_T – скорости жидкости и твердой частицы (U - средняя скорость жидкости на пути частицы без учета распределения скорости жидкости вокруг частицы); F_e – сила, приложенная со стороны внешнего потенциального поля; F – постоянная времени процесса переноса количества движения, связанного с силой сопротивления, т.е.

$$F = \frac{3}{8}\lambda_D \frac{\rho}{\rho_{\grave{o}}} a^{-1}\left|U - U_p\right| . \tag{4}$$

При стоксовом режиме $F = 9\mu / 2a^2\rho_T$, а вязкое сопротивление в соответствии с законом Стокса определяется следующим образом:

$$(4\pi/3)\grave{a}^3\rho_{\grave{o}}F(U - U_{\grave{o}}) = 6\pi\mu\grave{a}(U - U_{\grave{o}}) . \tag{5}$$

Корсин и Ламли [3, 4] предположили, что i-ю компоненту градиента давления можно представить в виде:

$$-\frac{\partial Đ}{\partial x_i} = \rho\frac{dU_i}{dt} - \mu\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_i \partial x_j} , \tag{6}$$

соответствующем уравнению Навье – Стокса, примененному к однофазной жидкости. Таким образом вводится еще одно допущение: твердые частицы не возмущают поле течения. (Когда имеется множество твердых частиц, последнее допущение необходимо видоизменить, как это сделано позже).

После подстановки уравнений (5) и (6) в (3) и соответствующих преобразований получаем

$$\frac{dU_{\grave{o}i}}{dt} = \frac{3\rho}{2\rho_{\grave{o}} + \rho}\left[\frac{dU_i}{dt} - \frac{2}{3}\nu\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_i \partial x_j}\right] +$$

$$+\frac{2\rho}{2\rho_{\grave{o}} + \rho}\left[\frac{9\mu}{2a^2}\left(U_i - U_{\grave{o}i}\right) + \rho\left(U_{\hat{E}} - U_{\grave{o}\hat{E}i}\right)\frac{\partial U_i}{\partial x_{\hat{E}}}\right] + \tag{7}$$

$$+\frac{9}{(2\rho_{\grave{o}} + \rho)\grave{a}}\sqrt{\frac{\rho\mu}{\pi}}\int_{t_{\grave{o}0}}^{t_{\grave{o}}}\frac{(d/d\tau)\left(U_i - U_{\grave{o}i}\right)}{\sqrt{t_{\grave{o}} - \tau}}d\tau .$$

Уравнение (7) становится линейным, если a мало и $\rho\frac{\partial U_i}{\partial x_i} << \frac{\mu}{a^3}$.

Оно остается уравнением первого порядка при условии

$U_{\ddot{a}}\dfrac{\partial U_i}{\partial x_i} >> \nu \dfrac{\partial^2 U_i}{\partial x_i \partial x_j}$. В сочетании с неравенством это условие означает

$$\frac{U_{\ddot{a}}}{\grave{a}^2\left(\partial^2 U_i / \partial x_i \partial x_j\right)} >> 1.$$

В первом приближении в уравнении (7) пренебрегаем членом $\rho(U_к - U_{Тк}) \times \partial U_i / \partial x_к$ и вводим следующее допущение: в процессе движения твердой частицы в соседстве с ней находится один и тот же элемент жидкости. При таком существенном ограничении приходится считать размеры частиц малыми, поскольку рассматриваемый элемент жидкости должен включать в себя частицу Р в процессе их совместного движения, хотя с течением времени элемент жидкости может деформироваться. Тем самым конкретизируется условие совместного движения твердой частицы и элемента жидкости, когда траектория частицы почти совпадает с линией тока, что приближенно можно выразить следующим образом: $d/dt \approx d/dt_\tau$. Последнее допущение означает, что в турбулентном потоке при достаточно большом времени диффузии коэффициенты диффузии частицы и жидкости равны, поскольку их линии тока совпадают. Заметим, что рассмотренное только что допущение является самым сильным ограничением. Без него, однако, невозможно точное решение. Учитывая лишь одну компоненту скорости и опуская индекс i, запишем уравнение движения в первоначальном виде

$$\frac{dU_{\grave{o}}}{dt} - \alpha\beta U_{\grave{o}} = -\alpha\beta U + \beta\frac{dU}{dt} + \beta\left(\frac{3\alpha}{\pi}\right)^{1/2} \int_{t_0}^{t} \frac{(d/d\tau)(U - U_{\grave{o}})}{\sqrt{t-\tau}} d\tau\,, \qquad (8)$$

где $\alpha = 3\nu / a^2$, $\beta = 3\rho / (2\rho_{\grave{o}} + \rho)$, β – отношение эффективных масс сферического элемента жидкости и сферической твердой частицы.

Для решения данного уравнения далее примем, что турбулентность однородная, установившаяся, и область турбулентности не ограничена. Эти допущения делают возможным использование простого спектра скорости и освобождают от необходимости учитывать взаимодействие с твердой границей (стенкой). Приняв Лагранжев спектр турбулентности, рассмотрим стационарный случай, когда начальный момент времени t_0 равен - . В лагранжевой системе координат прослеживается путь частицы и отмечаются статистически осредненные характеристики потока и твердой частицы. К компоненте скорости *u(t)* применим преобразование Фурье в виде

$$\tilde{u}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-i\omega t}dt$$

(индекс i для простоты опущен). Аналогичное выражение записывается для скорости частицы $\tilde{u}_т$. В дальнейшем все преобразованные величины будут обозначены сверху тильдой. В отличие от величины $\tilde{u}$ скорость частицы $\tilde{u}_т$ зависит не только от ω, но и от параметров α и β. Рассматриваемая функция u(t) является непериодической и убывающей, чем вводится допущение о существовании незатухающей турбулентности. Решение уравнения (8) с использованием преобразования Фурье при t_o - дает

$$\tilde{u}_{\grave{o}}=\frac{\left[\alpha+\left(\frac{3\alpha\omega}{2}\right)^{1/2}\right]+i\left[\omega+\left(\frac{3\alpha\omega}{2}\right)^{1/2}\right]}{\left[\alpha+\left(\frac{3\alpha\omega}{2}\right)^{1/2}\right]+i\left[\frac{\omega}{\beta}+\left(\frac{3\alpha\omega}{2}\right)^{1/2}\right]}\tilde{u}\ , \tag{9}$$

где

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}dt\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{1/2}}=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}(1+i)\omega^{1/2}\tilde{u}$$

Связь между величинами $\tilde{u}_{\grave{O}},\tilde{u}$ и комплексно сопряженными им величинами $\tilde{u}^{*}_{\grave{O}},\tilde{u}^{*}$ выражается соотношением

$$\frac{\tilde{u}^{*}_{\grave{o}}u_{\grave{o}}}{\tilde{u}^{*}\tilde{u}}=\frac{\Omega^{(1)}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)}{\Omega^{(2)}\left(\frac{\omega}{\alpha},\beta\right)}\ , \tag{10}$$

где

$$\Omega^{(1)}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)=\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^{2}+\sqrt{6}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^{3/2}+3\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)+6\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^{1/2}+1\ ,$$

$$\Omega^{(2)}\left(\frac{\omega}{\alpha},\beta\right)=\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2+\frac{\sqrt{6}}{\beta}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^{3/2}+3\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)+6\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^{1/2}+1\,.$$

Очевидно, что при $\omega/\alpha\to 0$ $\Omega^{(1)}/\Omega^{(2)}$ 1 ,а при $\omega/\alpha\to\infty$ соответственно $\Omega^{(1)}/\Omega^{(2)}$ β^2. Кроме того, при всех конечных значениях ω/α, если $\beta\to 0$, т.е. $\rho<<\rho_т$, $\Omega^{(1)}/\Omega^{(2)}$ 0. Если же $\beta=1$, т.е. $\rho=\rho_т$, $\Omega^{(1)}/\Omega^{(2)}=1$ при всех значениях ω/α. Значения β изменяются в пределах от 0 до 3. Стационарный лагранжев коэффициент автокорреляции между двумя значениями скорости при движении жидкости имеет вид

$$\mathrm{R}(\tau)=\frac{\langle u(t)u(t+\tau)\rangle}{\langle u^2\rangle},$$

где

$$\langle u(t)u(t+\tau)\rangle=\lim_{\grave{O}\to\infty}\frac{1}{2\grave{O}}\int_{-\grave{O}}^{\grave{O}}u(t)u(t+\tau)dt\,.$$

Функция плотности энергетического спектра $f(\omega)$ вводится выражением

$$\langle u^2\rangle f(\omega)=\lim_{\grave{O}\to\infty}\frac{\tilde{u}_{\grave{O}}^*\tilde{u}_{\grave{O}}}{2\pi\grave{O}},$$

где $\tilde{u}_{\grave{O}}$ - усеченный интеграл Фурье $\tilde{u}_{\grave{O}}(\omega)=\int_{-\grave{O}}^{\grave{O}}u(t)\mathring{a}^{-i\omega t}dt$, а $\tilde{u}_{\grave{O}}^*$ - соответствующая комплексно сопряженная величина. Из теоремы Винера – Хинчина следует

$$\mathrm{R}(\tau)=\int_0^\infty f(\omega)cos\,\omega\tau d\varpi \quad \text{и} \quad f(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{R}(\tau)cos\,\omega\tau d\omega\,.$$

Таким образом, по отношению друг к другу функции $\mathrm{R}(\tau)$ и $f(\varpi)$ являются взаимными косинусоидальными преобразованиями Фурье. В применении к частице также можно записать аналогичную последовательность выражений

$$\mathrm{R_p}(\tau)=\frac{\langle u_{\grave{O}}(t)u_{\grave{O}}(t+\tau)\rangle}{\langle u_{\grave{O}}^2\rangle}$$

$$\left\langle u^2\right\rangle f_{\grave{O}}(\omega)=\lim_{\grave{O}\to\infty}\frac{\tilde{u}^*_{\grave{O},\grave{O}}\tilde{u}_{\grave{O},\grave{O}}}{2\pi\grave{O}} \text{ и т.д.}$$

Зависимость функций R_p и f_T от параметров α и β очевидна. Приведенный выше коэффициент корреляции $R(\tau)$ выражает связь между значениями скорости жидкости в окрестности твердой частицы в различные моменты времени. Подробное рассмотрение этого коэффициента требует учета нелинейных эффектов, для чего нужен другой подход.

Поскольку для твердой частицы $\int_0^\infty f_{\grave{O}}(\omega)d\omega=1$, интегрирование по ω дает

$$\left\langle u_T^2\right\rangle=\int_0^\infty \lim_{T\to\infty}\frac{\tilde{u}^*_{T,T}\tilde{u}_{T,T}}{2\pi T}d\omega=\left\langle u^2\right\rangle\int_0^\infty\frac{\Omega^{(1)}}{\Omega^{(2)}}f(\omega)d\omega. \tag{11}$$

Отношение функций плотности энергетического спектра в соответствии с уравнениями (10) и (11) имеет вид

$$\frac{f_{\grave{O}}}{f}=\frac{\left\langle u^2\right\rangle}{\left\langle u_{\grave{O}}^2\right\rangle}\frac{\Omega^{(1)}}{\Omega^{(2)}}=\frac{\Omega^{(1)}}{\Omega^{(2)}}\left[\int_0^\infty\frac{\Omega^{(1)}}{\Omega^{(2)}}f(\omega)d\omega\right]^{-1}. \tag{12}$$

Для твердой частицы лагранжев коэффициент автокорреляции имеет следующий вид:

$$R_T(\tau)=\int_0^\infty f_{\grave{O}}(\omega)\cos\omega\tau d\varpi=\frac{\left\langle u^2\right\rangle}{\left\langle u_{\grave{O}}^2\right\rangle}\int_0^\infty\frac{\Omega^{(1)}}{\Omega^{(2)}}f(\omega)\cos\omega\tau d\omega.$$

Согласно [7] среднеквадратичное смещение и лагранжев коэффициент автокорреляции между двумя значениями скорости в поле с однородной турбулентностью связаны простым соотношением

$$\left\langle \tilde{\sigma}_{\grave{O}}^2(t)\right\rangle=2\left\langle u_{\grave{O}}^2\right\rangle\int_0^t(t-\tau)R_T(\tau)d\tau,$$

а соответствующий коэффициент турбулентной диффузии имеет вид

$$D_T(t)=\frac{d}{dt}\frac{\left\langle x_T^2\right\rangle}{2}=\left\langle u_T^2\right\rangle\int_0^t R_T(\tau)d\tau=\left\langle u_T^2\right\rangle\int_0^\infty\frac{\sin\omega t}{\omega}f_T(\omega)d\omega.$$

При очень малых и очень больших временных диффузии получаются следующие предельные выражения:

$$\lim_{t\to\infty} D_\partial = \left\langle u^2 \right\rangle t, \quad \lim_{t\to\infty} D_\partial = \frac{\pi}{2}\left\langle u_\partial^2 \right\rangle f_\partial(0).$$

Отношение коэффициентов диффузии

$$\frac{D_\partial}{D} = \frac{\left\langle u_\partial^2 \right\rangle}{\left\langle u^2 \right\rangle} \frac{\int_0^t R_\partial(\tau)d\tau}{\int_0^t R(\tau)d\tau} = \frac{\left\langle u_\partial^2 \right\rangle}{\left\langle u^2 \right\rangle} \frac{\int_0^t \frac{\sin\omega t}{\omega} f_\partial(\omega)d\omega}{\int_0^t \frac{\sin\omega t}{\omega} f(\omega)d\omega}.$$

сводится в предельных случаях к $\lim_{t\to 0} D_T/D = \left\langle u_T^2 \right\rangle / \left\langle u^2 \right\rangle$, $\lim_{t\to\infty} D_T/D = 1$,, причем, как указывалось выше, $\lim_{\varpi\to 0} \Omega^{(1)}/\Omega^{(2)} = 1$. Множители $\left\langle u_\partial^2 \right\rangle f_\partial(\omega)d\omega$ и $\left\langle u^2 \right\rangle f(\omega)d\omega$ выражают среднюю кинетическую энергию турбулентности на единицу массы твердой частицы и жидкости соответственно в интервале угловых частот ω и $\omega + d\omega$. Уравнение (12) показывает, что $\Omega^{(1)}/\Omega^{(2)}$ представляет собой просто отношение двух «спектральных» энергий.

Тепло- и массообмен, а также явление коагуляции в турбулентном потоке взвесей с малой концентрацией мелких частиц определяются величиной среднеквадратичной относительной скорости [8]. Число Рейнольдса, характеризующее движение частицы, вычисляется на основе относительной скорости $u_R = u_T - u$. После подстановки этой скорости в уравнение (8) при условии t_0= - и последующего преобразования Фурье результирующее выражение разрешается относительно u_R следующим образом:

$$\tilde{u}_R = -\frac{i(1-\beta)\omega}{\left[\alpha + \beta\left(\frac{3\alpha\beta}{3}\right)^{1/2}\right] + i\left[\omega + \beta\left(\frac{3\alpha\beta}{3}\right)^{1/2}\right]}\tilde{u}(\omega). \qquad (13)$$

Здесь, по-прежнему, имеется в виду, что $\tilde{u}_R = \tilde{u}_R(\omega, \alpha, \beta)$ и

$$\frac{\widetilde{u}_R^* u_R}{\widetilde{u}^* \widetilde{u}} = \frac{\Omega_R^{(1)}\left(\frac{\omega}{\alpha},\beta\right)}{\Omega^{(2)}\left(\frac{\omega}{\alpha},\beta\right)},$$

где $\Omega_R^{(1)}\left(\frac{\omega}{\alpha},\beta\right) = \left(\frac{1-\beta}{\beta}\frac{\omega}{\alpha}\right)$ и $\Omega^{(2)}\left(\frac{\omega}{\alpha},\beta\right)$. При $\omega/\alpha \to 0$ $\Omega_R^{(1)} / \Omega^{(2)} \to 0$; при $\beta \to 0$ $\Omega_R^{(1)} / \Omega^{(2)} \to 1$, а при $\beta=1$ и всех значениях ω/α $\Omega_R^{(1)} / \Omega^{(2)} = 0$. Выражение для среднеквадратичной относительной скорости имеет вид

$$\left\langle u_R^2 \right\rangle = \int_0^\infty \lim_{\grave{O}\to\infty} \frac{\widetilde{u}_{R,\grave{O}}^* u_{R,\grave{O}}}{2\pi \grave{O}} d\omega = \left\langle u^2 \right\rangle \int_0^\infty \frac{\Omega_R^{(1)}}{\Omega^{(2)}} f(\omega).$$

Выводы. Интенсивность относительного турбулентного движения рассчитывается по интенсивности пульсаций жидкости, энергетическому спектру и величине $\Omega_R^{(1)} / \Omega^{(2)}$. Последняя полностью определяется стохастическим уравнением относительного движения.

Список источников:

1. Tchen C.M. Dissertation, Delft, Martinus Niihoft, The Hague (1947).
2. Хинце Ю.О. Турбулентность. Физматгиз, 1963. - 680с.
3. Corrsin S., Lumley I., Appl. Sci. Res. 6A, 114 (1956).
4. Corrsin S., I. Appl. Phis., 23, 113 (1952).
5. Marble F.E. Phys. Fluids, 7, 1270, 1964.
6. Soo S.L. Fluid Dynamics of Multiphase System, Paper № 36E, A.J.ch. E Conference, Dallas, Texas (1966).
7. Kaye B.H., Boardman R.P. Proceedins of Symposium on Interection between Fluids and Particles, Inst. Of Chem. Eng., London, 1962.- 17p.
8. Friedlander S.K., A. I., 3, 381 (1957).