УДК 624.072.21/23

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА И ОЦЕНКА ЕГО ТОЧНОСТИ

Гордеев Г.Г., канд. физ.-мат. наук,
Донецкий национальный технический университет

Получен класс приближенных решений уравнений движения гиростата и дана оценка их точности.

A class of approximate solutions for gyrostat motion equations is found, and the evaluation of their accuracy is made.

Проблема и ее связь с научными или практическими задачами. Проблема интегрирования уравнений движения твердого тела с одной неподвижной точкой возникла сразу же после того как Эйлером были получены эти уравнения. Позже были получены уравнения движения гиростата твердого тела с неподвижной точкой несущего тела, вращающиеся вокруг осей, закрепленных на теле-носителе [4]. Возникла проблема интегрирования уравнений движения гиростата. Рассматриваемые механические системы являются элементами современных технических устройств, в частности гироскопических приборов. Следовательно, проблема получения решений уравнений движения гиростата имеет практическое значение, так как они могут быть использованы для расчета и проектирования элементов технических устройств и приборов. Точных решений рассматриваемых нелинейных уравнений (общих и частных) получено немного за достаточно большой промежуток времени [7]. Отсюда возникает проблема получения приближенных решений уравнений движения гиростата, в частном случае, уравнений движения твердого тела с неподвижной точкой.

Анализ исследований и публикаций. Работ по приближенному интегрированию уравнений движения гиростата и твердого тела с неподвижной точкой достаточно мало [1,6]. Алгоритмы получения приближенных решений в имеющихся по этой теме публикациях имеют нерекуррентный вид, что затрудняет их использование при численной реализации на компьютере. Многие имеющиеся приближенные решения рассматриваемой задачи не обладают достаточной общностью, зачастую отсутствует оценка их точности.

Постановка задачи. Интегрирование уравнений движения гиростата (в частном случае твердого тела с неподвижной точкой) в силу их нелинейности и многопараметричности представляет достаточно трудную математическую проблему. Ставится задача получения широкого класса приближенных решений путем приведения уравнений движения к гамильтоновой форме и использования достаточно хорошо разработанных в последнее время методов теории возмущений гамильтоновых систем [5]. Поставлена задача оценки точности приближенных решений.

Изложение основного материала. Рассмотрим движение гиростата. Гиростатом называют механическую систему, состоящую из твердого тела с неподвижной точкой (тело-носитель) и тел, оси вращения которых жестко закреплены на теле-носителе (несомые тела) [4].

Уравнения движения гиростата имеют вид [7]:

$$\frac{\tilde{d}\overline{K}}{dt} + \overline{\omega} \cdot \overline{K} = \Gamma \overline{e} \cdot \overline{\gamma}, \tag{1}$$

$$\frac{\tilde{d}\overline{\gamma}}{dt} = \overline{\gamma} \cdot \overline{\omega}, \tag{2}$$

где $\overline{K}$ - кинетический момент гиростата относительно неподвижной точки;

$\overline{\omega}$ - угловая скорость тела-носителя;

$\overline{\gamma}$ - единичный вектор силы тяжести;

$\Gamma = Mg\left|\overline{R}\right|$ (M – масса гиростата; $\left|\overline{R}\right|$ - радиус-вектор центра масс гиростата в неподвижной точке, $\overline{e} = \overline{R}/\left|\overline{R}\right|$, знак «~» означает относительную производную (производную по времени в осях, связанных с телом-носителем гиростата).

Кинетический момент гиростата относительно неподвижной точки

$$\overline{K} = \overline{X} + \overline{\lambda}, \ \overline{X} = A\overline{\omega}, \tag{3}$$

где тензор A имеет вид

$$A = A^0 + \sum_{i=1}^{n}\left(\left(m_i \overline{r}_i^{\,2} + B_i\right)E - m_i \overline{r}_i \overline{r}_i - B_i \overline{e}_i \overline{e}_i\right). \tag{4}$$

Здесь A^0 – тензор инерции тела-носителя гиростата в его неподвижной точке; m_i – масса i-го несомого тела; A_i, B_i – его осевой и экваториальный моменты инерции; E – единичный тензор; $\overline{r}_i$ - вектор, проведенный из неподвижной точки в центр масс носимого тела; $\bar{e}_i$ - единичный вектор его оси.

Гиростатический момент $\bar{\lambda}$ имеет вид:

$$\bar{\lambda} = \sum_{i=1}^{n} A_i u_i \bar{e}_i\,, \tag{5}$$

где u_i - проекция абсолютной угловой скорости носимого тела на ось вращения i-го носимого тела

$$u_i = \bar{\varpi} \cdot \bar{e}_i + \dot{\varphi}_i\,, \tag{6}$$

где φ_i - угол вращения i-го носимого тела.

Система (1), (2) допускает интегралы

$$\frac{1}{2}\bar{\varpi} \cdot A \cdot \bar{\varpi} - \Gamma \bar{e} \cdot \bar{\gamma}\,,\ \left(\bar{X} + \bar{\lambda}\right) \cdot \bar{\gamma} = k\,,\ \bar{\gamma} \cdot \bar{\gamma} = 1 \tag{7}$$

Для решения поставленной задачи – построения приближенных решений уравнений движения гиростата, запишем эти уравнения в гамильтоновой форме и применим методы возмущений гамильтоновых систем, достаточно хорошо разработанные в последнее время [5].

Для этого вводим обобщенные координаты и обобщенные импульсы. Для определения положения тела-носителя введем три обобщенные координаты q_1, q_2, q_3, для определения положения носимых тел выберем углы их поворотов φ_I относительно их осей, закрепленных на теле-носителе. Обобщенные импульсы вводим следующим образом

$$p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k},\ P_m = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_m}\ \ (k = 1,2,3;\ m = 1,2,...,n), \tag{8}$$

где T – кинетическая энергии гиростата

$$T = \frac{1}{2}\left(\bar{X} \cdot a \cdot \bar{X}\right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k^2}{A_k}\,, \tag{9}$$

где $a = A^{-1}$ - матрица, обратная матрице A.

Тогда уравнения движения гиростата (1), (2) можно записать в гамильтоновой форме [2,3]

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k},\ \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}\ \ (k = 1,2,3)\,, \tag{10}$$

$$\frac{d\varphi_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_k},\ \frac{dP_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_k}\ \ (k = 1,2,...,n)\,, \tag{11}$$

где формула Гамильтона имеет инвариантный по отношению к выбору обобщенных координат вид:

$$H=\frac{1}{2}\left(\left(\left(\Omega^{-1}\right)^T\cdot\overline{p}-\overline{\lambda}\right)\cdot a\cdot\left(\left(\Omega^{-1}\right)^T\cdot\overline{p}-\overline{\lambda}\right)+\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k^2}{A_k}\right)-\Gamma\overline{e}\cdot\overline{\gamma}, \tag{12}$$

здесь Ω^{-1} - матрица, обратная матрице Ω, входящей в кинематические соотношения $\overline{\omega}=\Omega\dot{\overline{q}}\left(\overline{q}=(q_1,q_2,q_3)^T\right)$, символ «$T$» означает транспонирование.

Если в качестве q_1, q_2, q_3 выбрать одну из модификаций углов Эйлера, то функция Гамильтона примет вид:

$$H=\frac{1}{2}a_{11}p_3^2+\frac{1}{2\cos q_2}(a_{22}(p_1+p_3\sin q_2)\cos q_3-p_2\cos q_2\sin q_3-$$

$$\lambda_2\cos q_2)^2+a_{33}((p_1+p_3\sin q_2)\cdot\sin q_3+p_2\cos q_2\cos q_3+\lambda_2\cos q_2)^2-$$

$$-2a_{33}((p_1+p_3\sin q_2)\cos q_3-p_2\cos q_2\sin q_3-\lambda_2\cos q_2)\cdot$$

$$\cdot((p_1+p_3\sin q_2)\sin q_3+p_2\cos q_2\cos q_3+\lambda_2\cos q_2)+$$

$$+\frac{p_3-\lambda_1}{\cos q_2}(a_{12}(p_1+p_3\sin q_2)\cos q_3-p_2\cos q_2\sin q_3-\lambda_2\cos q_2)-$$

$$-a_{13}((p_1+p_3\sin q_2)\sin q_3+p_2\cos q_2\cos q_3+\lambda_3\cos q_2)+\sum_{k=1}^{n}\frac{P_k^2}{A_k}-$$

$$-\Gamma(e_1\sin q_2+e_3\cos q_2\cos q_3-e_3\cos q_2\cos q_3). \tag{13}$$

Приближенные значения гамильтоновой системы уравнений (10)-(13) строятся в окрестности стационарных решений уравнений (1), (2). Эти решения описывают равномерные вращения гиростата и найдены в работе [7]. Приведем их:

$$\gamma_k=-\frac{1}{\omega^2}\sum_{m=1}^{3}\alpha_{km}(\Gamma e_m+\omega\lambda_m), \tag{14}$$

где α_{km} – элементы матрицы $(A-\rho E)^{-1}$.

Направляющие импульсы перманентной оси вращения γ_k связаны соотношением $\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1$, следовательно

$$\sum_{k=1}^{3}\left(\sum_{m=1}^{3}\alpha_{km}(\Gamma e_m+\omega\lambda_m)\right)^2=\omega^4. \tag{15}$$

Угловую скорость равномерного вращения гиростата ω находим, задавая параметр ρ из этого уравнения, а затем из соотношений

(14) находим направляющие косинусы перманентной оси вращения γ_k (k=1,2,3).

В качестве системы осей, неизменно связанной с гиростатом, выберем такую систему осей, в которой первая ось – перманентная ось вращения. Положения этих осей по отношению к инерциальной системе (третья ось по вертикали) зададим с помощью одной из модификаций углов Эйлера, которые для стационарных решений имеют вид

$$q_1 = \omega t\,,\ q_2 = 0\,,\ q_3 = 0\,, \tag{16}$$

соответствующие обобщенные импульсы

$$p_1 = k = A_{11}\omega + \lambda_1,\ \ p_2 = n_1 = -\left(A_{13}\omega + \lambda_2\right),$$
$$p_3 = n_2 = A_{11}\omega + \lambda_3. \tag{17}$$

В дальнейшем при построении приближенных решений гамильтоновой системы будем использовать только устойчивые стационарные решения уравнений движения гиростата.

Вводя малые величины

$$q_2 = q_1',\ q_3 = q_3',\ p_2' = p_2 - n_1,\ p_3' = p_3 - n_2, \tag{18}$$

являющиеся возмущениями стационарного решения (16), (17), разложим функцию Гамильтона (13) в ряд Тейлора, представив ее суммой однородных полиномов Пуассона H_k $(k = 1,2,\ldots)$(штрихи затем для удобства опускаем):

$$H = \sum_{k=1}^{\infty} H_k\,,\ H_k = \sum h_{nmij} q_1^m q_2^n p_1^i p_2^j\,, \tag{19}$$

где суммирование проводится по всем значениям индексов $m,\ n,\ i,\ j$, для которых $m+n+i+j=k$. Коэффициенты h_{mnij} приведены в работе [2].

Систему уравнений Гамильтона (10), (11), (19) для возмущений можно привести к нормальной форме

$$\frac{dy_k}{dt} = i\mu_k y_k + L_{k,m}\,, \tag{20}$$

$$\frac{dY_k}{dt} = -i\mu_k Y_k + M_{k,m}\,, \tag{21}$$

где $L_{k,m}, M_{k,m}$- сходящиеся по степеням канонических переменных y_k, Y_k, начинающихся с членов порядка не ниже m. К нормальному виду гамильтонову систему можно привести используя как классические преобразования Биркгофа, так и более эффективные методы Депри-Хори-Кэмела [8].

Отбросив $L_{k,m}$, $M_{k,m}$, получим приближенную систему

$$\frac{dy_k}{dt} = i\mu_k y_k, \quad \frac{dY_k}{dt} = -i\mu_k Y_k \quad (k = 1,2), \tag{22}$$

которую нетрудно проинтегрировать и найти приближенные решения уравнений Гамильтона

$$y_k = g_k e^{i\mu_k t}, \quad Y_k = g_k' e^{-i\mu_k t} \quad (k = 1,2). \tag{23}$$

В итоге, вернувшись к исходным возмущениям, их можно записать в тригонометрической форме (k=1,2):

$$q_k = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{2} A_{k,i} \cos(l_i \mu_j t) + B_{k,i} \sin(l_i \mu_j t) \right), \tag{24}$$

$$p_k = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{2} C_{k,i} \cos(l_i \mu_j t) + D_{k,i} \sin(l_i \mu_j t) \right), \tag{25}$$

где величины $A_{k,i}$, $B_{k,i}$, $C_{k,i}$, $D_{k,i}$, l_i определяются через начальные условия уравнений Гамильтона [8].

Проведем оценку точности полученного приближенного решения (24), (25) на основе общей теории гамильтоновых систем [5]. Если точность приближения задана, то добиться ее можно, выбрав определенное количество членов тригонометрических полиномов (выбрав m). При этом фиксируется интервал $(0,T)$ времени t, на котором это приближение справедливо. Зависимость Т и числа приближений m связано с соотношением

$$T \le \left(q_{10}^2 + q_{20}^2 + p_{10}^2 + p_{20}^2 \right)^{-\frac{1}{2}(m+1)},$$

где q_{10}^2, q_{20}^2, p_{10}^2, p_{20}^2 - начальные (при t=0) значения канонических переменных.

Чтобы расширить промежуток $(0,T)$, необходимо увеличить число членов тригонометрических полиномов (число m), при этом точность приближения станет еще выше.

Выводы и направления дальнейших исследований. Получен широкий класс приближенных решений уравнений движения гиростата (в частном случае твердого тела с одной неподвижной точкой). Этого удалось добиться с помощью перехода к эквивалентной гамильтоновой системе, что позволило применить методы нелинейной теории возмущений. Данная оценка точности решения на конечном интервале времени. Эти приближенные решения могут быть использованы при изучении нелинейных колебаний гиростата. В силу известной аналогии Кирхгофа между задачей о движении гиростата и задачей о равновесии гибкого стержня эти решения можно использовать для анализа изгиба и кручения стержней при больших перемещениях его оси. Использованный в данной задаче алгоритм построения приближенных решений может быть использован и для решения уравнений движения систем тел, моделирующих современные технические устройства.

Список источников

1. Ганиев Р.Ф., Кононенко В.О. Колебания твердых тел. М.: Наука, 1976. – 256 с.
2. Гордеев Г.Г. О функции Гамильтона тяжелого гиростата//Механика твердого тела. -1988.- Вып.20.-с.105-109.
3. Гордеев Г.Г. Уравнения Эйлера-Кирхгофа в гамильтоновой форме (обобщенные координаты – компоненты вектора конечного поворота). Сборник трудов горно-электромеханического факультета. Донецк: ДонГТУ. -193 с.
4. Леви-Чивити Т., Амальди У. Курс теоретической механики, т.II, ч.2, Издательство иностранной литературы, 1951.
5. Павленко Ю.Г. Гамильтоновы методы в электродинамике и в квантовой механике. Издательство Московского университета, 1985. -337 с.
6. Старжинский В.М. Прикладные методы нелинейных колебаний. М.: Наука, 1977. -256 с.
7. Харламов П.В. Лекции по динамике твердого тела. Новосибирск: Издательство Новосибирского университета, 1965. -221 с.
8. Deprit A. Canonical transformations depending on a small parameter. Celestial Mechanics, 1969, v.1, №1.