УДК 531

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ ВЕКТОРНО-МАТРИЧНОЙ ФОРМЫ ОБЩЕГО ВАРИАЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ

Андреев Ю.М. канд. техн. наук, доц.,
Национальный технический университет
"Харьковский политехнический институт"

Приведен алгоритм аналитического вывода уравнений статики, динамики и кинетостатики дискретных механических систем. Алгоритм основан на векторно-матричном представлении общего уравнения механики. Получена аналитическая оценка его вычислительной эффективности. Благодаря универсальности и эффективности этот алгоритм может быть основой системы компьютерной алгебры для решения задач механики указанных систем.

The algorithm of an analytical obtaining of equations of a statics, dynamics and kinetostatics of discrete mechanical systems is adduced. The algorithm is based on vector-matrix representation of a general equation of mechanics. The analytical estimation of its computing efficiency is obtained. Due to a universality and efficiency this algorithm can be the basis of a system of computer algebra for problem solving of mechanics of the indicated systems.

Проблема и ее связь с научными и практическими задачами. Решение задач механики дискретных механических систем, примером которых служит система твердых тел с упруго-диссипативно-кинематическими связями, в том числе (не)стационарными, (не)голономными, (не)удерживающими, наталкивается на нетривиальную проблему вывода уравнений, корректно описывающих ее поведение. В связи с широким внедрением в инженерную и исследовательскую практику персональных компьютеров (ПК), задача лаконичного формального описания механических моделей и автоматизации процесса получения математической модели по такому описанию является весьма актуальной. Ее оптимальное решение позволит создать мощные вычислительные комплексы для решения задач механики структурно сложных систем – космических, робототехнических, транспортных и т.д. Ядром таких комплексов должна стать соответствующая специальная система компьютерной алгебры (СКА).

Анализ исследований и публикаций. Разработке основ таких СКА и их самих в последние 20-25 лет уделяется достаточно много внимания, о чем свидетельствует большое число публикаций (см., например, [1-3] и др.). Все разработанные методы опираются на известные принципы и теоремы механики и обладают либо хорошей эффективностью, либо универсальностью. Разработать алгоритм, сочетающий свойства универсальности и вычислительной эффективности до сих пор не удавалось. В работе [3] дан пример оценки эффективности предлагаемых алгоритмов в области манипуляцонных систем роботов. В работах [4, 5] приведен универсальный алгоритм постановки и решения задач статики, кинематики, динамики и кинетостатики таких систем. Область приложения его может быть расширена, а сам он модернизирован для повышения эффективности.

Постановка задачи. В данной работе проводится доработка алгоритма, приведенного в работах [4, 5], преследующая две цели. Распространить его на класс разветвленных систем типа «дерево» с одновременным улучшением его эффективности в смысле [3]. При этом необходимо получить ее аналитическую оценку в зависимости от числа твердых тел в системе.

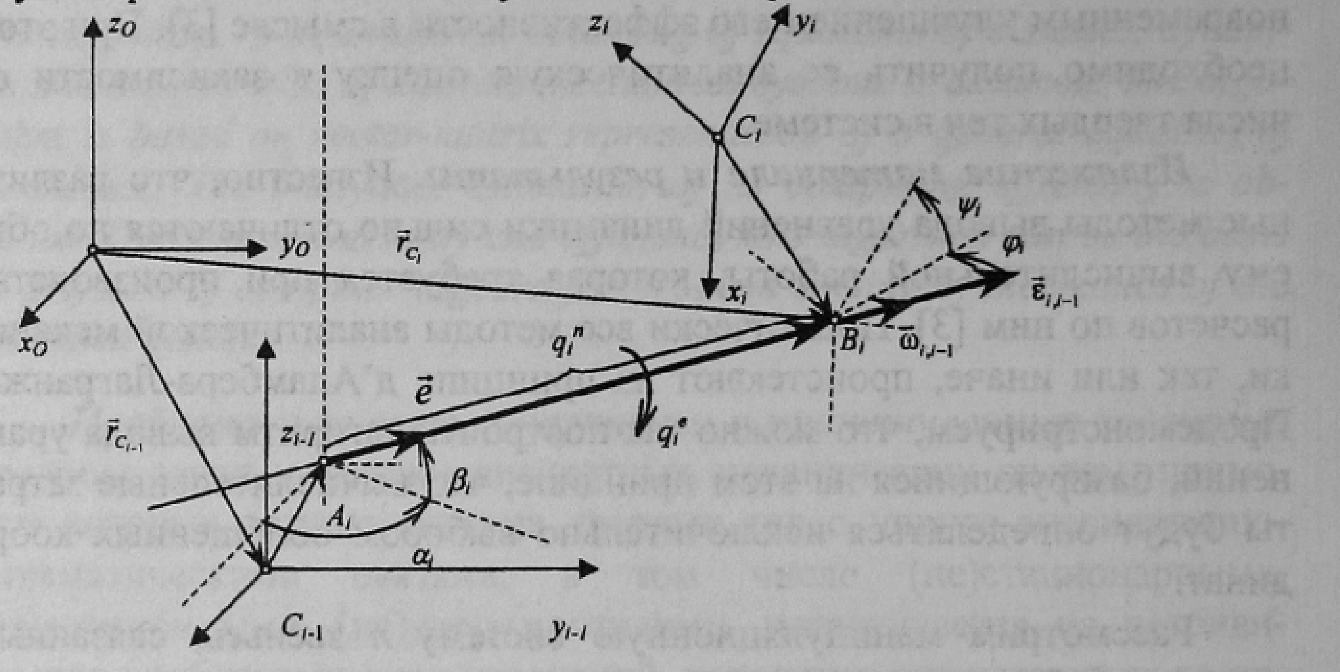
Изложение материала и результаты. Известно, что различные методы вывода уравнений динамики сильно отличаются по объему вычислительной работы, которая требуется при производстве расчетов по ним [3]. Практически все методы аналитической механики, так или иначе, проистекают из принципа д'Аламбера-Лагранжа. Продемонстрируем, что можно так построить алгоритм вывода уравнений, базирующийся на этом принципе, что вычислительные затраты будут определяться исключительно выбором обобщенных координат.

Рассмотрим манипуляционную систему n звеньев, связанных между собой кинематическими вращательными и поступательными парами. Пронумеруем все звенья системы от стойки (с нулевым номером) по возрастанию. С каждым телом свяжем главную центральную систему координат (СК), пронумеруем их так же, как тела. Тогда положение каждой СК относительно предыдущей будет определяться либо углом поворота $q^в$ для вращательной пары, либо смещением $q^п$ – для поступательной. Обобщим способ описания структуры манипуляционной системы, предложенный в работе [4]. Каждое звено системы описывается одной строкой вида

$$Name_i[\sim Name_{i-1}]\|[R(\alpha),][S(d),]...=[m(m_i),][J_x(J_{ix}),][J_y(J_{iy}),][J_z(J_{iz})],\quad(1)$$

где $Name_i$ - название данного звена i, $Name_{i-1}$ - название звена, в СК которого определяется положение СК данного, при отсутствии такого элемента предполагается, что данное тело связано со стойкой, $[R(\alpha),][S(d),]..$- список последовательности поворотов ($R(\alpha)$) и смещений ($S(d)$), задающий преобразование СК (i-1)-го тела в СК i-го, $[m(m_i),][J_x(J_{ix}),][J_y(J_{iy}),][J_z(J_{iz})]$ - инерционные параметры – масса и составляющие тензора инерции в главной центральной СК тела.

На рис. 1 показаны СК – корневая, (i-1)-я и i-я, вектор $\overline{A_iB_i}$ - ось кинематической пары, соединяющей эти тела, причем точки A_i и B_i выбираются так, чтобы легко можно было задать их координаты в СК (i-1)-й и i-й, соответственно, углы, задающие положение этой оси в СК i-й – $\{\varphi_i, \psi_i\}$ и (i-1)-й – $\{\alpha_i, \beta_i\}$, обобщенные координаты ($q_i^в, q_i^n$) в случае вращательной и поступательной пар.



Из него следует описание i-го звена в форме (1)

$$Звено_i \sim Звено_{i-1}\,|\,S_x(x_{A_i}),\ S_y(y_{A_i}),\ S_z(z_{A_i}),\ R_z(\alpha_i),\ R_y(\beta_i),\ R_x(q_i^в\,\|\,0),$$
$$S_x(AB\,\|\,q_i^n),\ R_y(\psi_i),\ R_z(\varphi_i),\ S_x(-x_{B_i}),\ S_y(-y_{B_i}),S_z(-z_{B_i}$$

Двойная черта означает «или» (вращательная «или» поступательная пара), индексы сверху в скобках здесь и далее – номер СК.

Выразим кинематические параметры движения тела i через параметры движения тела (i-1).

$\vec{\omega}_{i,i-1}=\dot{q}_i^в\vec{e}$, $\quad\vec{\varepsilon}_{i,i-1}=\left(\ddot{q}_i^в\vec{e}\right)+\vec{\omega}_i\times\left(\dot{q}_i^в\vec{e}\right)$, $\quad\overline{C_{i-1}C_i}=\overline{C_{i-1}A_i}+\overline{A_iB_i}-\overline{C_iB_i}$,

$$\vec{\omega}_i = \vec{\omega}_{i-1} + \vec{\omega}_{i,i-1}, \quad \vec{\varepsilon}_i = \vec{\varepsilon}_{i-1} + \vec{\varepsilon}_{i,i-1}, \quad \vec{r}_{C_i} = \vec{r}_{C_{i-1}} + \overrightarrow{C_{i-1}C_i}, \tag{2}$$

$$\vec{v}_{пер} = \vec{v}_{C_{i-1}} + \vec{\omega}_{i-1} \times \overrightarrow{C_{i-1}C_i}, \vec{v}_{отн} = \left(\dot{q}_i^n \vec{e}\right) - \vec{\omega}_{i,i-1} \times \overrightarrow{C_i B_i},$$

$$\vec{v}_{C_i} = \vec{v}_{пер} + \vec{v}_{отн}, \qquad \vec{a}_{Кор} = 2\vec{\omega}_{i-1} \times \vec{v}_{отн},$$

$$\vec{a}_{пер} = \vec{a}_{C_{i-1}} + \vec{\varepsilon}_{i-1} \times \overrightarrow{C_{i-1}C_i} + \vec{\omega}_{i-1} \times \vec{\omega}_{i-1} \times \overrightarrow{C_{i-1}C_i},$$

$$\vec{a}_{отн} = \left(\ddot{q}_i^n \vec{e}\right) + \vec{\varepsilon}_{i,i-1} \times \overrightarrow{C_i B_i} - \vec{\omega}_{i,i-1} \times \vec{\omega}_{i,i-1} \times \overrightarrow{C_i B_i},$$

$$\vec{a}_{C_i} = \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{отн} + \vec{a}_{Кор}. \tag{3}$$

Для системы n тел, обобщенные силы инерции складываются из обобщенных сил инерции каждого i-го тела, которые можно представить в виде [4]

$$-\mathbf{Q}_i^u = \left[\frac{\partial \vec{r}_{C_i}}{\partial \mathbf{q}}\right]^T m_i \ddot{\vec{r}}_{C_i} + \left[\frac{\partial \vec{\omega}_i^{(i)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right]^T \left(\left[\vec{J}_i^{(i)}\right] \cdot \vec{\varepsilon}_i^{(i)} + \vec{\omega}_i^{(i)} \times \left[\vec{J}_i^{(i)}\right] \cdot \vec{\omega}_i^{(i)}\right) \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{q} = \left\{q_i^в \,\|\, q_i^n\right\}$, $i = 1,2,\ldots,n$ – вектор обобщенных координат, m_i – масса, $\vec{r}_{C_i}$ - радиус-вектор центра масс, $\vec{\omega}_i^{(i)}, \vec{\varepsilon}_i^{(i)}$ - векторы угловой скорости и углового ускорения, $\left[\vec{J}_i^{(i)}\right]$ - тензор инерции i-го тела. Векторы угловой скорости, углового ускорения и тензор инерции задаются в главной центральной СК i-го тела, радиус-вектор центра масс – в абсолютной неподвижной (корневой) СК. Выразим и первое слагаемое через радиус-вектор центра масс в СК i-го тела

$$\left[\frac{\partial \vec{r}_{C_i}}{\partial \mathbf{q}}\right]^T m_i \ddot{\vec{r}}_{C_i} = \left[\frac{\partial \vec{r}_{C_i}^{(i)}}{\partial \mathbf{q}}\right]^T \left(m_i \vec{a}_{C_i}^{(i)} + \omega_i^{(i)} \times m_i \vec{v}_{C_i}^{(i)}\right). \tag{5}$$

Так как все кинематические параметры, входящие в выражение (4) после подстановки (5) легко находятся из рекуррентных соотношений (2)-(3), то получается очень эффективный алгоритм. Сделаем оценку числа математических операций, заключенных в уравнениях (4)-(5), в зависимости от числа n тел в системе. Следующая таблица показывает - в первом столбце - последовательность получения выражения (4), во втором - верхнюю оценку числа арифметических операций, заключенных в выражениях слева.

Выражение	Операций
$\overrightarrow{C_{i-1}B_i}^{(i-1)} = [x_{A_i} y_{A_i} z_{A_i}]^T + S_{\alpha_i \beta_i}(A_i B_i \,\|\, q_i^n \vec{e})$	$3\otimes + 3\oplus$

$\vec r^{(i)}_{C_i} = S^{(i)}_{(i-1)}\left(\vec r^{(i-1)}_{C_{i-1}} + \overrightarrow{C_{i-1}B_i}^{(i-1)}\right) - [x_{B_i}\, y_{B_i}\, z_{B_i}]^T$	$4\otimes+8\oplus$
$\left[\dfrac{\partial \vec r^{(i)}_{C_i}}{\partial \mathbf{q}}\right]^T = \left(\left[\dfrac{\partial \vec r^{(i-1)}_{C_{i-1}}}{\partial \mathbf{q}}\right]^T + 0\,\|\,\vec e^T S^T_{\alpha_i\beta_i}\right) S^{(i)\,T}_{(i-1)} + \left(\vec r^{(i-1)}_{C_{i-1}} + \overrightarrow{C_{i-1}B_i}^{(i-1)}\right)^T \left[\dfrac{\partial S^{(i)}_{(i-1)}}{\partial q^в_i}\right]^T$	
$\vec v^{(i)}_{отн} = -[S_{\varphi_i\psi_i}(\dot q^в_i \vec e)] \times [x_{B_i}\, y_{B_i}\, z_{B_i}]^T \,\|\, S_{\varphi_i\psi_i}(\dot q^n_i \vec e)$	$9\otimes+3\oplus$
$\vec a^{(i)}_{Кор} = 2[S^{(i)}_{(i-1)} \vec\omega^{(i-1)}_{i-1}] \times \vec v^{(i)}_{отн}$	$13\otimes+5\oplus$
$\overrightarrow{C_{i-1}C_i}^{(i-1)} = \overrightarrow{C_{i-1}B_i}^{(i-1)} - S^{(i-1)}_{(i)}[x_{B_i}\, y_{B_i}\, z_{B_i}]^T$	$4\otimes+5\oplus$
$\vec a^{(i-1)}_{пер} = \vec a^{(i-1)}_{C_i} + \vec\varepsilon^{(i-1)}_{i-1} \times \overrightarrow{C_{i-1}C_i}^{(i-1)} + \vec\omega^{(i-1)}_{i-1} \times \vec\omega^{(i-1)}_{i-1} \times \overrightarrow{C_{i-1}C_i}^{(i-1)}$	$18\otimes+15\oplus$
$\varepsilon^{(i-1)}_{i,i-1} = S_{\alpha_i\beta_i}\left(\ddot q^в_i \vec e\right),\ \omega^{(i-1)}_{i,i-1} = S_{\alpha_i\beta_i}\left(\dot q^в_i \vec e\right),\ \omega^{(i)}_{i,i-1} = S_{\varphi_i\psi_i}\left(\dot q^в_i \vec e\right)$	$3\otimes$
$\vec a^{(i-1)}_{отн} = S_{\alpha_i\beta_i}\left(\ddot q^n_i \vec e\right) + \vec\varepsilon^{(i-1)}_{i,i-1} \times \overrightarrow{C_iB_i}^{(i-1)} - \vec\omega^{(i-1)}_{i,i-1} \times \vec\omega^{(i-1)}_{i,i-1} \times \overrightarrow{C_iB_i}^{(i-1)}$	$21\otimes+15\oplus$
$m_i\left(\vec a^{(i)}_{C_i} + \omega^{(i)}_i \times \vec v^{(i)}_i\right) = m_i[S^{(i)}_{(i-1)}\left(\vec a^{(i-1)}_{пер} + \vec a^{(i-1)}_{отн}\right) + \vec a^{(i)}_{Кор} + \vec\omega^{(i)}_i \times \vec v^{(i)}_i]$	$29\otimes+31\oplus$
$\left[\dfrac{\partial \vec r^{(i)}_{C_i}}{\partial \mathbf{q}}\right]^T \left(m_i \vec a^{(i)}_{C_i} + \omega^{(i)}_i \times m_i \vec v^{(i)}_i\right)$	$(4+3i)\otimes+$ $(2+2i)\oplus$
$\vec\omega^{(i)}_i = S^{(i)}_{(i-1)} \vec\omega^{(i-1)}_{i-1} + \vec\omega^{(i)}_{i,i-1}$	$4\otimes+5\oplus$
$\vec\varepsilon^{(i)}_i = S^{(i)}_{(i-1)} \vec\varepsilon^{(i-1)}_{i-1} + S_{\varphi_i\psi_i}\left(\ddot q^в_i \vec e\right) + \vec\omega^{(i)}_i \times \vec\omega^{(i)}_{i,i-1}$	$13\otimes+11\oplus$
$\left[\vec J^{(i)}_i\right] \cdot \vec\varepsilon^{(i)}_i + \vec\omega^{(i)}_i \times \left[\vec J^{(i)}_i\right] \cdot \vec\omega^{(i)}_i$	$12\otimes+3\oplus$
$\left[\dfrac{\partial \vec\omega^{(i)}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right]^T = \left[\dfrac{\partial \vec\omega^{(i-1)}_{i-1}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right]^T S^{(i)\,T}_{(i-1)} + \vec e^T S^T_{\varphi_i\psi_i} \,\|\, 0$	
$\left[\dfrac{\partial \vec\omega^{(i)}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right]^T \left(\left[\vec J^{(i)}_i\right] \cdot \vec\varepsilon^{(i)}_i + \vec\omega^{(i)}_i \times \left[\vec J^{(i)}_i\right] \cdot \vec\omega^{(i)}_i\right)$	$(4+3i)\otimes+$ $(2+2i)\oplus$
$-\mathbf{Q}^u_i$	$(141+6i)\otimes+$ $(108+4i)/2\oplus$
Итого	$(144+3n)n\otimes+$ $(217+7n)n/2\oplus$

Выражения в левом столбце получены из (2)-(5) домножением, при необходимости на соответствующие матрицы поворота СК S. Число операций, необходимых для вычисления косинусов и синусов, входящих в эти матрицы, как и в [3], не учитывается. Из таблицы можно заключить, что, например, для известного шестистепенного манипулятора «Пума» число операций в инерционных слагаемых составит $972\otimes+777\oplus$, что достаточно хорошо согласуется с прямым подсчетом операций в алгоритме.

Приведение к обобщенным координатам в таких системах понижает порядок системы дифференциальных уравнений до числа n тел в системе. Однако расплатой за это является громоздкость и необозримость получаемых уравнений [2]. В работе [3] самым оптимальным алгоритмом с точки зрения минимума операций считается метод, называемый там методом Ньютона-Эйлера, заключающийся в том, что все звенья манипулятора формально разъединяются, к ним кроме активных сил прикладываются силы взаимодействия звеньев. В нашем случае это эквивалентно применению принципа освобождаемости от внутренних связей, учету дополнительных степеней свободы для каждого звена как твердого тела, введению дополнительных обобщенных координат. Тогда в выражении (4) пропадут левые матричные сомножители, на которые падает львиная доля операций. Приведение уравнения (4) к такой естественной системе координат, по-видимому, действительно, дает его наипростейший вид, к тому же разрешенный относительно старших производных. Хотя при этом появятся силы реакций отброшенных связей.

Выводы и направление дальнейших исследований.

В работе приведен универсальный алгоритм формирования инерционных слагаемых уравнений движения, сравнимый по вычислительной эффективности с наиболее быстродействующими, известными сегодня. Однако он более универсален, фактически включает в себя такие алгоритмы и позволяет строить уравнения для систем с (не)голономными и (не)стационарными связями [5], что является целью дальнейших исследований.

Список источников

1. Грошева М.В., Ефимов Г.В. О системах аналитических вычислений на ЭВМ //Пакеты прикладных программ. Аналитические преобразования. – М., 1988. – С. 5-30.
2. Погорелов Д.Ю. Методы компьютерного моделирования систем тел с большим числом степеней свободы. Выступление на семинаре Института космических исследований РАН "Механика, Управление и Информатика", 2001.
3. Фу К., Гонсалес Р., Ли К. Робототехника: Пер. с англ. – М., 1989. – 624 с.
4. Андреев Ю.М. Аналитическое компьютерное описание механических моделей манипуляционных систем для задач динамики и кинематики // Труды 8-й Международной научно-технической конференции «Физические и компьютерные технологии в народном хозяйстве». - ХНПК «ФЭД». - Харьков, 2003. С. 262-266.
5. Андреев Ю.М., Штейнвольф Л.И. Компьютерное построение дифференциальных уравнений движения неголономных систем // Динамика и прочность машин. – 1993. – Вып. 54. – С. 93 - 98.