

УДК 531/534 (091)

**ДОНЕЦКОЙ ШКОЛЕ
АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ – 40 ЛЕТ**

Харламова Е.И., доктор физ.-мат. наук, профессор;
Мозалевская Г.В., кандидат физ.-мат. наук, доцент.
Институт прикладной математики и механики НАН
Украины, отдел прикладной механики

Приведены основные результаты исследований за сорок лет сотрудников отделов прикладной и технической механики Института прикладной математики и механики НАН Украины в области динамики твердого тела.

The principal results of investigations obtained during 40 years by researchers of departments of applied and theoretical mechanics of the Institute of applied mathematics and mechanics NAN of Ukraine in the area of rigid body dynamics are presented.

В предлагаемой работе рассказано о научных результатах, полученных в отделах прикладной и технической механики Института прикладной математики и механики Национальной Академии наук Украины. Подведен итог сорокалетнего существования так называемой Донецкой школы механики. Работа появилась в связи с 80-летием со дня рождения ее научного руководителя – Павла Васильевича Харламова, в связи с семидесятилетием кафедры теоретической механики ДонГТУ, на которой работал и заведовал в 1952 – 59 г.г. П.В. Харламов, в связи с сорокалетием Донецкого научного центра.

Это не история отделов – не ставилась задача упомянуть всех авторов, работавших в отделах или в содружестве с ними. В журнальной статье, естественно, не может быть приведен весь список работ, выполненных в Донецке, указаны монографии и лишь некоторые работы, послужившие, как правило, основой для появления дальнейших результатов.

В 1965 г. в составе Академии наук Украины образовался Донецкий Научный центр. Среди прочих институтов был создан **Институт прикладной математики и механики** (до 1970 года – Вычислительный центр). Отдел прикладной механики возглавил приехавший из Новосибирского Академгородка избранный членом-корреспондентом АН УССР Павел Васильевич Харламов (1924 – 2001).

Тема кандидатской диссертации "Движение твердого тела в жидкости", которую П.В. Харламов защитил в 1955 г., будучи преподавателем кафедры теоретической механики ДПИ, и его дальнейшие научные интересы лежали в области аналитической механики, и особенно в той ее части, которую занимает в динамике твердого тела классическая задача о движении тела, имеющего неподвижную точку. К этой теме относилась его докторская диссертация "О решениях уравнений динамики твердого тела" (1964). Именно в этой работе были заложены те основные направления исследований, которые затем развивались и углублялись учениками и коллегами П.В. Харламова в Донецке.

Шесть уравнений Эйлера – Пуассона классической задачи о движении твердого тела имеют три интеграла, известен интегрирующий множитель. Это дает принципиальную возможность понизить порядок системы. Однако нелинейность уравнений и интегралов приводила к таким трудностям, что попытки понижения порядка системы не достигали цели.

В 1962 г. П.В. Харламов сообщил о новом подходе к постановке классической задачи динамики твердого тела. Он отказался от традиционного использования главных осей тензора инерции в неподвижной точке тела и определяющую роль придал оси, идущей из неподвижной точки O к центру масс тела. Вместо тензора инерции он использовал гириационный тензор и связал с ним определенным образом выбор оставшихся двух осей. Такие оси П.В. Харламов назвал специальными. В качестве переменных он взял компоненты момента количества движения тела относительно точки O и единичного вектора направления силы тяжести. Задача свелась к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям, каждое из которых имеет первый порядок. Их называют динамическими уравнениями Харламова.

Второй результат, который был получен П.В. Харламовым еще до Донецкого периода, относится к построению геометрической картины движения тела в пространстве.

Уже Пуансо (1851) пишет, что хотелось бы иметь полное представление обо всех этапах движения, наблюдать за телом во все время его вращения. Принципиальную возможность геометрического истолкования гарантирует теорема кинематики, принадлежащая Пуансо: движение тела, имеющего неподвижную точку, можно воспроизвести качением без скольжения подвижного годографа по неподвижному (геометрическое место конца переменного вектора угловой ско-

рости тела в подвижном и неподвижном пространствах), и для каждого момента времени может быть указано положение тела в пространстве. Это и дало основание назвать решение, для которого построена такая картина движения, *полным*.

Вся трудность заключалась в построении неподвижного годографа. В 1964 г. задача была решена – появились кинематические уравнения Харламова, которые давали принципиальную возможность построить геометрическую картину движения тела в любом случае интегрируемости.

Задача о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку, - частный случай задачи о движении в идеальной безграничной жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью. П.В. Харламов преобразовал уравнения к новому виду, откуда при определенных условиях вытекали уравнения уже известных задач. Установление аналогий в уравнениях различных задач всегда приводило к всплеску интереса ученых к этим задачам, и, следовательно, к новым результатам.

Таким образом были заложены основные направления исследований в области динамики твердого тела: преобразования уравнений, геометрическое истолкование решений, движение тела в жидкости.

П.В. Харламов приехал в 1965 г. в Донецк не один. Вместе с ним из Новосибирска приехала группа его коллег и учеников. Все они занимались проблемами динамики твердого тела и уже в первые годы работы в Институте и в Донецком университете под руководством П.В. Харламова получили ряд существенных результатов.

Вначале это были работы, в основе которых лежали известные классические результаты и те результаты П.В. Харламова, о которых говорилось выше. Однако к исследованию привлекались все новые и новые задачи, создавались новые уравнения и новые методы, появились системы тел, тела с неголономной связью, тела, движущиеся в жидкости, обратились к более сложному объекту, введенному еще Н.Е. Жуковским, – к гиростату. Результаты, полученные в этих направлениях, привели к серии диссертационных работ уже в первое десятилетие существования отдела.

А.И. Докшевич положил в основу диссертации найденное им в 1964 г. новое точное решение задачи о движении тела с неподвижной точкой. А.Я. Савченко, продолжая работы В.А. Стеклова, построил и исследовал некоторые решения в задаче о движении твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной жидкостью. А.М. Ковалев

исследовал одно из наиболее сложных решений классической задачи – решение Гесса и его обобщение Л.Н. Сретенским на гиростат, изучил конус Харламова осей равномерных вращений гиростата. Решение Н. Ковалевского исследовал методом годографов Г.В. Горр. Используя метод инвариантных соотношений нашла новое решение Г.В. Мозалевская. К классу решений, который она изучила, принадлежат ранее найденные решения А.И. Докшевича и П.В. Харламова – Л.М. Ковалевой. Нашли новое решение классической задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой Б.И. Коносевиц и Е.В. Позднякович. Построили методом годографов полное решение в случаях интегрируемости, содержащих свободные параметры и поэтому сложных для исследования, П.М. Бурлака, В.С. Елфимов, В.И. Коваль.

К исследованию подключались новые сотрудники. Это были, в основном, выпускники донецких вузов – университета и политехнического института.

В предыдущем перечислении упомянут объект – гиростат. Если рассматриваемое тело несет на себе другие тела, совершающие по отношению к носителю циклические движения, такие, что распределение масс системы при движении сохраняется, то его и называют гиростатом. В определении, идущем от Н.Е. Жуковского, гиростат – тело, имеющее многосвязные полости, заполненные идеальной жидкостью, находящейся в циркуляционном течении. Математическая модель такого объекта по сравнению с твердым телом дополняется вектором – постоянным гиростатическим моментом. Со всеми подробностями вывод уравнений движения гиростата дает П.В. Харламов в книге “Лекции по динамике твердого тела”, 1965, [1, с.177-185]. Естественно стремление обобщить на гиростат результаты, известные для твердого тела. Гиростат стал одним из основных объектов исследований донецких ученых.

Метод инвариантных соотношений тоже упоминался в перечне первых работ отдела.

Основная трудность при построении решений – нелинейность системы уравнений. Общее решение, которое содержало бы произвольными и параметры, характеризующие распределение масс, и параметры, определяемые начальными условиями, не найдено. Во всех решениях, найденных после С.В. Ковалевской, переменные связаны соотношениями, производные от которых в силу уравнений обраща-

ются в нуль лишь на некотором подмножестве множества всех решений. Возможности построения таких решений – инвариантных соотношений расширились благодаря созданному в 1974 г. методу инвариантных соотношений [2]. Метод конструктивен, распространен на случай системы инвариантных соотношений и получил широкое применение к построению новых классов точных решений в различных задачах динамики твердого тела.

Важен вопрос, в каком классе функций следует искать соотношение, которое может быть инвариантным для данной системы уравнений.

У уравнений Эйлера – Пуассона правые части и интегралы – алгебраические функции. Четвертый интеграл в трех общих случаях интегрируемости тоже алгебраический. Об истории идущего от С.В. Ковалевской вопроса о существовании алгебраического четвертого интеграла можно прочитать в книге “Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние” [3, с.138]. Она написана в Донецке, 1978 г., ее авторы Г.В. Горр, Л.В. Кудряшова, Л.А. Степанова собрали в одной книге историю формирования основных понятий геометрии масс и уравнений движения твердого тела от Даламбера и Эйлера, описали известные случаи интегрируемости, новые результаты как в классической задаче о движении твердого тела, так и в других задачах динамики. В книге изложен и метод построения инвариантного соотношения [3, с.140].

Существованием алгебраического интеграла занимался в 1974-1975 гг. А.И. Докшевич. В одной из работ он дал свое простое доказательство относящейся к этому вопросу теоремы Лиувилля – доказательство автора (1896) было чрезвычайно сложным. Монография А.И. Докшевича приведена в списке литературы [4]. Этот талантливый и самобытный ученый (к сожалению, уже ушедший из жизни) считал, что “главная часть задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки состоит в изучении свойств решений системы уравнений Эйлера – Пуассона”. Именно эта задача сейчас и выходит на передний край при изучении аналитической структуры динамических систем, и тема, касающаяся вопроса о том, какими функциями могут быть решения уравнений Эйлера – Пуассона, не закрыта. Так, в 1999 г. в Донецке вышла работа И.Н. Гашененко “О мероморфных решениях уравнений Эйлера – Пуассона”, изучена возможность представления решений обобщенными рядами Лорана.

Было ясно, что инвариантные соотношения следует искать среди алгебраических функций. Каких именно, должны были подсказать уравнения.

Работы по преобразованию уравнений продолжались. В случае, когда одна из специальных осей совпадает с главной и гирос타тический момент ортогонален этой оси, удалось свести задачу к одному разрешающему уравнению – интегродифференциальному уравнению. Этот результат [5] явился основой докторской диссертации Е.И. Харламовой (1970).

Прозрачная структура уравнений Харламова, интегродифференциального уравнения и подсказывает, в каком классе функций следует искать инвариантное соотношение.

Применение новых уравнений и методов, которые возникли уже в первом десятилетии после создания отдела, позволило ученым Донецка значительно увеличить число точных решений уравнений задачи о движении гиростата.

К середине 20 века были найдены решения уравнений Эйлера – Пуассона, допускающие четвертый интеграл с произвольной постоянной, – случаи Эйлера, Лагранжа, Ковалевской. Решения, найденные при ограничениях на начальные условия: Гесса, Бобылева-Стеклова, Горячева, Стеклова, Горячева-Чаплыгина, Чаплыгина, Ковалевского, Гриоли. Решение Жуковского о движении гиростата по инерции обобщило решение Эйлера.

В следующие сорок лет появились и новые решения классической задачи, и решения уравнений гиростата – два решения Сретенского, 1963, обобщили решения Гесса и Горячева – Чаплыгина. Остальные решения найдены в Донецке.

Есть пять решений Харламова, 1964, 1965, 1971, они обобщают на гиростат равномерные вращения Штауде, решения Бобылева-Стеклова, Стеклова, Ковалевского, случай Аппельрота; два решения Докшевича, 1970; два решения Харламовой, 1966, 1969; решение Коносевиича – Поздняковича классической задачи, 1969; решение Харламова – Харламовой, 1969, частный случай которого – решение Харламова – Ковалевой, 1970; решение Мозалевской, 1969. Из интегродифференциального уравнения получены и результаты предшественников и найдены три новых случая – это три решения Харламовой – Мозалевской, они представлены в монографии [6], 1986, второе

из них – обобщение на гиристат решения Коносеви́ча – Поздняковича.

Таким образом, более половины всех известных решений принадлежит донецким механикам.

В предложенном перечне решения не расположены по какому-либо признаку, в монографии [3, с.198] приведены классификационные таблицы точных решений, в качестве основного признака принята степень инвариантного соотношения, установленного в каждом решении в дополнение к известным трем интегралам. О точных решениях можно прочитать в книге [7, с.55].

Уже из этого, далеко не полного, перечня результатов видно, что в Донецке сложился большой работоспособный коллектив механиков. Естественно, надо было общаться с коллегами других городов. И вот под эгидой АН УССР, Научного совета по проблеме “Общая механика”, ИПММ созывается в Донецке в 1969 г. Первое республиканское Собрание по динамике твердого тела, в 1971 г. – Второе ... и так через каждые 3 – 5 лет. В юбилейном для института 2005 году пройдет IX Международная конференция “Устойчивость, управление и динамика твердого тела”. Участники конференций – ученые из ближнего и дальнего зарубежья.

Появился научный журнал – в 1969 г. вышел Выпуск 1 республиканского ежегодника “Механика твердого тела”, ответственным редактором Выпусков 1-30 был П.В. Харламов, с Выпуска 31 – А.М. Ковалев. Журнал рассылается во все центральные библиотеки бывшего Союза, в университеты. Выпуски 16–23 переведены в США, журнал реферируется в Zentralblatt MATH. Ответственным секретарем Выпусков 1 – 6 был А.М.Ковалев, а с Выпуска 7 и по сей день – Г.В.Мозалевская. В юбилейном году выйдет Выпуск 35 журнала МТТ.

Ежегодный журнал, публикации в нем и в ведущих математических журналах Украины, России, зарубежных стран, конференции привели к тому, что стали говорить о **Донецкой школе механики**. Значение результатов было оценено сразу же. Они нашли отражение в монографии канадского ученого Е. Лейманиса, в монографиях Ю.А. Архангельского, В.М. Старжинского. Появился ряд обзорных статей.

Результаты исследований донецких ученых в области динамики твердого тела стали основой определенного направления в механике.

Ими интересуются, на работы ссылаются, продолжают их. В большой степени это происходит потому, что к исследованию в Донецке была принята не только задача о тяжелом теле с неподвижной точкой, но и другие задачи, постановками которых обогатилась динамика твердого тела к началу 20 века.

Обобщения возможны в различных направлениях. Рассматривая одно твердое тело, можно вводить силовые поля более общего вида и наибольший интерес представляет ньютоновское поле сил. Можно изучать движение тел, подчиненных дополнительным связям, и здесь особенно важны неголономные связи. Актуальна задача о движении тела с учетом окружающей среды, замечательные результаты достигнуты классиками механики, когда тело движется в идеальной несжимаемой жидкости.

Другое направление для обобщений – увеличение числа рассматриваемых тел. Наибольший интерес, и теоретический, и прикладной, представляет задача о движении системы тел, связанных сферическими шарнирами (у тел одна общая точка) или цилиндрическими (тела имеют общую ось).

В каждом из перечисленных направлений работают и донецкие ученые, получено много интересных результатов, построены новые решения.

Постановки задачи о движении систем связанных тел приводили к очень сложным математическим моделям, так что нахождение решений было почти невозможным, однако техника требовала решения именно таких задач: системой связанных тел моделируют гиростаты, центрифуги, спутники с двойным вращением, конструкции космической техники и т.д.

Даже в том случае, когда в связке два тела, задача становится гораздо более сложной, чем задача о движении одного тела. Исследователи стремились использовать особенности объектов, прибегали к приближенным инженерным методам. Но для обоснования этих методов требуется и строгая теория, опирающаяся на методы аналитической динамики. В задаче о движении гироскопа в кардановой подвесе этой цели служат исследования Е.Л. Николаи, А.Ю. Ишлинского, Н.Г. Четаева, В.Н. Кошлякова, Д.М. Климова и других. Задачу о так называемом идеальном гироскопе поставил, по видимому, Е.Л. Николаи, и известны лишь три случая построения

точных решений – они принадлежат Е.Л. Николаи, Н.Г. Четаеву, А.А. Богоявленскому.

При исследовании движения связанных тел выделяют тело-носитель, и основной задачей обычно является изучение влияния, оказываемого на движение носителя носимыми телами. При первых подходах носимые тела моделировали точечными массами, и приходилось оценивать погрешности таких идеализаций. обстоятельный обзор исследований по построению точных решений этой задачи написан Г.В. Мозалевской и А.И. Хохловым [8].

Поиски наиболее рациональных форм уравнений движения системы связанных тел не прекращались. Донецкие публикации “Об уравнениях движения системы твердых тел” [9] и “Составной пространственный маятник”, 1972, были первыми, сообщавшими о полученных в явном виде динамических и кинематических дифференциальных уравнениях для цепи, составленной из любого количества твердых тел (вообще говоря, гиростатов), сочлененных сферическими или цилиндрическими шарнирами.

На основе этих уравнений изучена очень существенная конструкция – последовательно соединенные сферическими шарнирами n гироскопов Лагранжа.

Отказ от принятых в системе n гироскопов Лагранжа условий (отклонение распределения масс от структуры Лагранжа, учет упругости опор оси носимого тела в носителе и пр.) сильно усложняет уравнения. Анализ влияния таких отклонений на движение, в конечном счете, тела-носителя – одна из задач, рассмотренных в Донецке. В монографии [10] поставлены и решены эти и другие задачи, относящиеся к указанной связке.

Основываясь на своих уравнениях, П.В. Харламов ввел еще одно понятие – **составной пространственный маятник**. Это цепочка гиростатов, последовательно соединенных между собой и с основанием цилиндрическими шарнирами с неколлинеарными осями. При определении П.В.Харламова гироскоп в кардановом подвесе – пример пространственного маятника.

Новая постановка дала возможность Б.И.Коносевичу изучить влияние широкого класса конструктивных несовершенств на равномерные вращения ротора и вывести имеющие важное прикладное значение формулы для угловой скорости ухода оси ротора [11].

С такой же общностью, как уравнения системы связанных тел, получена математическая модель несколько иной системы, состав-

ленной тоже из любого количества гиростатов. М.П. Харламов, автор работы [12] "Гиросистемы", назвал подобную систему **гирокустом**. В [9] рассматривается именно цепочка тел – каждое следующее тело имеет общую точку – сферический шарнир с предыдущим телом. Гиросуст в [12] : с несущим телом (платформой, рамой и т.п.) цилиндрическими шарнирами связаны кожухи гиростатов, которые, в свою очередь, могут быть носителями других тел. Эти общие модели связанных тел позволяют составить математическую модель любой, более частной, задачи.

В работе [13], 1996, М.Е. Лесина построила математическую модель гиросферы на базе уравнений движения связанных твердых тел. Модели, предложенные в [12, 13], учитывают возможные конструктивные несовершенства объектов, в том числе и те, которыми в инженерных постановках пренебрегают. Теперь влияние их может быть оценено. Дана общая постановка задачи о гиросистеме, находящейся на объекте, движущемся на поверхности вращающейся Земли или над ней. Найдено несколько точных решений в задаче о гиросфере в случае, когда характеризующая упругий элемент зависимость является многочленом.

В книгах [10, 7] описаны все новые результаты о движении системы тел, полученные в Донецке.

В основе всех работ, где гиростат трактуется как тело с полостями, заполненными жидкостью, лежит работа Н.Е. Жуковского "О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью", 1885.

Уже в 1968 г. вышла работа П.В. Харламова, А.Я. Савченко [14], где ясно была сформулирована задача: "Для визначення впливу рідкого заповнювача на рух тіла-носія, бажано мати набір точних розв'язків задачі". Там же сказано, что естественно обратиться к тем случаям, когда задача сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, а это бывает, когда идеальная несжимаемая жидкость находится в безвихревом движении и целиком заполняет полость тела. В этих условиях и изучали: как тело движется, новые решения, полости шаровые, эллипсоидальные, несимметричные, обобщения на ньютоновское поле, линейные и иные инвариантные соотношения у системы, описывающей движение, и, конечно же, устойчивость движений. Авторы таких работ И.А. Болграбская, Г.В. Горр, А.О. Игнатъев, Ю.М. Ковалев, В.И. Коваль, Ю.Н. Кононов,

Е.В. Позднякович, В.Е. Пузырев, К.А. Ручкин, А.Я. Савченко, Я.А. Савченко, С.Н. Судаков и другие.

Исследование **устойчивости** тех движений, которые удается найти, – чрезвычайно важная задача. Так сложилось, что с самого начала научной деятельности А.Я. Савченко выбрал устойчивость своим направлением. В 1974 г. он исследовал устойчивость равномерных вращений гироскопа Ковалевской, системы двух гироскопов Лагранжа. В его первой монографии [15], 1977, рассматривается устойчивость по Ляпунову и устойчивость при постоянно действующих возмущениях решений некоторого класса систем уравнений. Вторым методом Ляпунова позволяет указать достаточные условия устойчивости, и всегда очень важно установить из анализа уравнений первого приближения необходимые условия. Этому посвящены многие работы А.Я. Савченко. В монографиях [16,17], написанных в соавторстве с И.А. Болграбской, А.О. Игнатьевым, Г.А. Кононыхиным, рассматривается устойчивость уже систем связанных тел. Практика показала, что космические аппараты, которые вначале моделировались системой твердых тел, оказались объектами, значительно менее жесткими. Пришлось учитывать упругость в модели – в узлы соединения ввести упругий восстанавливающий момент.

Алексей Яковлевич Савченко избран в 1992 г. членом-корреспондентом НАН Украины. У него много последователей и учеников. Исследования устойчивости различных механических систем не прекращаются, здесь работают И.А. Болграбская, А.З. Брюм, В.С. Елфимов, А.Л. Зуев, А.О. Игнатьев, А.М. Ковалев, Л.М. Ковалева, В.И. Коваль, Б.И. Коносевиц, М.Е. Лесина, Т.И. Погосян, Е.В. Позднякович, В.Е. Пузырев, С.Н. Судаков и др.

Еще одна задача идет из 19 века. Г. Кирхгоф, 1870, свел задачу о **движении твердого тела в жидкости** к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений, взяв в качестве переменных компоненты угловой скорости и скорости точки тела в осях, связанных с телом. В.А. Стеклов записал уравнения задачи в более общем случае – тело имеет полости, заполненные жидкостью, и отверстия, через которые циркулирует внешняя по отношению к телу жидкость.

Взяв иные переменные, П.В. Харламов предложил [18], 1963, новые формы уравнений. Развернутая запись одной из них привела к

системе, совпадающей по форме с уравнениями движения тела с неподвижной точкой, и она включает в себе, как частные случаи, уравнения различных классических задач. Тем самым установлена (Е.И. Харламова, Л.А. Степанова, 1988) полная аналогия, идущая от В.А. Стеклова, между двумя задачами, которые рассматривались ранее как совершенно независимые. Эта аналогия дала возможность получить новые результаты – Г.В. Горр, Г.В. Мозалевская, Л.А. Степанова. П.В. Харламов построил для своей системы методом инвариантных соотношений широкие классы решений как новых, так и обобщающих классические результаты Кирхгофа, Стеклова, Ляпунова, Чаплыгина.

Об этой задаче можно прочитать в [3, с.188].

Разные формы уравнений Кирхгофа приводили зачастую к тому, что известное уже решение получали из другой формы в других переменных как новое. П.В. Харламов всегда говорил об этой опасности. Его последняя работа – препринт “О различных представлениях уравнений Кирхгофа”, 2001 (соавт. Г.В. Мозалевская, М.Е. Лесина), подвела итоги всем разнотолкам по поводу уравнений Кирхгофа, приведены все различные формы их. Сделан вывод: “Любые математические исследования уравнений Кирхгофа достаточно проводить только для одного их представления – все математические результаты таких исследований элементарной линейной невырожденной заменой переменных переносятся на остальные представления уравнений Кирхгофа”.

Рассмотренные две классические задачи – о движении гиростата и движении тела в жидкости – получили математическое обобщение. Основываясь на созданных в современной математике методах качественного исследования динамических систем, М.П. Харламов, 1988, разработал абстрактную теорию механических систем с гироскопическими силами, указал свойства таких систем и условия, обеспечивающие существование интеграла, линейного относительно скоростей [19].

Задача Эйлера о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки получила обобщение. Теперь, при наличии в теле и гиростатического момента, рассматривают, например, действие магнитного поля на тело, которое, в свою очередь, несет магнитные заряды, электрические, принимают ньютоновское, кулоновское притяжения тела неподвижным центром, рассматривают гироскопические силы и т.д. Все это добавляет члены в уравнения, и систему, объеди-

няющую все перечисленные случаи, называют обобщенными уравнениями.

Уже классики механики отвечали на вопрос, при каких условиях уравнения в тех или иных случаях интегрируемости описывают **наиболее простые и наглядные движения**. Этот вопрос решается в исследованиях Г.В. Горра и его учеников. О возможных классах движений тела можно прочитать в монографии Г.В. Горра, А.А. Илюхина, А.М. Ковалева, А.Я. Савченко [20], 1984.

В приложениях важную роль играют потенциальные силовые поля, и в первую очередь – **центральное ньютоновское поле**.

Уже Л. Эйлер посвятил несколько своих работ движению тела под действием сил ньютоновского притяжения, записал динамические уравнения задачи. Не останавливаясь на истории задачи, скажем лишь, что в ней нашли применение результаты Д.Н. Горячева, относящиеся к 1915 г. Из обширной литературы выделим работы В.В. Белецкого и Ю.А. Архангельского 1957–1965 гг.

К этому же времени (1959) относится работа [21]. В ней дано аналитическое и геометрическое решения задачи о движении тела в центральном ньютоновском поле сил в случае, когда тело закреплено в центре масс. Показано, что движение тела воспроизводится качением без скольжения эллипсоида инерции по поверхности эллиптического цилиндра, неподвижного в пространстве. Если нет ньютоновского поля, картина сводится к известной интерпретации Пуансо движения тела в случае Эйлера.

Вычисление момента ньютоновских сил можно встретить в различных изложениях. В работе Е.И. Харламовой, Л.М. Ковалевой, 1972, момент записан в инвариантной форме. В той же работе записаны уравнения для системы твердых тел, имеющих структуру гиростата.

Говоря об аналогиях, нельзя не сказать о той, благодаря которой в Донецке принято к изучению еще одно направление механики, возглавляемое А.А. Илюхиным. Мы говорим об **анalogии Кирхгофа – Жуковского** задачи динамики твердого тела и задачи о кручении и изгибе тонких стержней. Уравнения этих задач идентичны, что приводит к их взаимному обогащению при переносе идей и методов, получаемых в одной задаче, на другую.

Первая группа результатов была изложена А.А. Илюхиным в 1969 г., последующие – в статьях, монографии [22] и работах его учеников. Однако ограничения, накладываемые на параметры в вышеуказанных задачах, различны, поэтому лишь некоторые из случаев интегрируемости задачи о движении твердого тела имеют физический смысл во второй. А.А. Илюхин отмечает пять таких случаев.

Очень существенным вкладом А.А. Илюхина является найденное им в 1970 г. для анизотропных стержней неравенство, связывающее параметры стержня и упругие характеристики материала. Оно обобщило неравенство Е.Л. Николаи, ранее найденное для изотропных стержней. Изучались изгиб и кручение изотропных стержней, равновесие анизотропного стержня, деформация стержня концевыми моментами, деформации криволинейного упругого стержня и пр. – Г.Г. Гордеев, Б.П. Иванов, А.М. Ковалев, С.А. Колесников, Н.Н. Щепин и другие.

В работе [23] А.А. Илюхин дал обзор результатов по теории упругих стержней в трехмерной постановке, в ней большой список литературы.

Иной метод решения пространственных задач нелинейной теории упругих стержней предложен в [24], 1982. Использована современная вычислительная техника для изображения пространственной формы упругой линии (геометрическое место центров масс поперечных сечений стержня). Получены уравнения, позволяющие дать наглядное представление о закручивании деформированного стержня по его длине – М.П. Харламов, Е.К. Сергеев.

Выше упомянуты **методы теории наблюдений**. Одно из очень серьезных направлений исследований в Донецкой школе – управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость динамических систем. Возглавляет это направление А.М. Ковалев. Уже в 1980 г. вышла его монография [25]. Создан метод ориентированных многообразий, с помощью которого решена проблема управляемости систем общего вида; рассмотрена управляемость динамических систем по части переменных, достаточные условия стабилизируемости; получены условия разрешимости и алгоритмы разрешимости прямых и обратных задач управления. Этим и другим вопросам посвящена монография А.М. Ковалева, В.Ф. Щербака, 1993 [26], работа А.М. Ковалева "Стабилизация равномерных вращений твердого тела при помощи одного ротора", 1998.

В теорию ориентированных многообразий с применением к задачам нелинейной теории управления и наблюдаемости динамических систем распространен метод инвариантных соотношений. К последним разработкам этого метода относится получение уравнения [27], позволившего установить связь между подходами А. Пуанкаре – П.В. Харламова и Т. Леви-Чивита к понятию инвариантного соотношения.

Интенсивно в этой теме работают сотрудники отдела В.Ф. Щербак, А.Л. Зуев, В.Н. Неспирный и др.

В 1979 г. образован отдел технической механики, его возглавил А.Я. Савченко, с 1998 г. заведует отделом А.М. Ковалев.

В Донецке рассматривалась задача, относящаяся к системам связанных тел и поставленная еще Дж. Раусом – **задача о движении тела на подвесе**. Поставлена она с обычными для аналитической динамики предельными идеализациями, допуская использование лагранжева формализма при построении математической модели и методы Ляпунова при обсуждении устойчивости решения. Эта задача получила свое развитие в 60-е годы на Украине – А.Ю. Ишлинский, Е.П. Морозова, В.А. Стороженко, М.Е. Темченко и др. Пожалуй, это один из редких случаев, когда задача, возникшая в аналитической динамике, могла быть сопоставлена с результатами эксперимента. А.Ю. Ишлинский свидетельствует: “Возникновению этого нового раздела мы обязаны замечательному экспериментатору Сергею Васильевичу Малашенко, впервые подвесившему быстро вращающееся тело на струне, обнаружившему ряд неожиданных форм такого движения и наблюдавшему их устойчивость”. Дело в том, что в опыте появились формы такого расположения струны и тела, возможность которых никак не вытекала из теории. Сопоставление результатов теории и эксперимента привело к целому ряду публикаций, обсуждавших различные постановки задачи.

Объяснение найдено донецкими учеными. Модель, в которой рассмотрены ранее не учтенные факторы, предложена П.В. Харламовым в работе “Движение тела на подвесе” [10, с.120] и применена в работе “О смене “стационарных движений” тела на подвесе” [10, с.131] для объяснения ухода вращающегося тела от вертикальной к другим формам стационарных движений. В п. 1, 2 главы 6 книги [7] М.Е. Лесиной, Л.В. Кудряшовой дана неконсервативная, не-

голономная модель с такой общностью постановки, которая позволяет учитывать и конструктивные несовершенства объекта.

Тела, как правило, несвободны, их движение ограничивают связи, которые математически представляются некоторыми соотношениями на координаты, углы, скорости. **Связь неголономна**, если она выражена дифференциальным неинтегрируемым соотношением. Развитие динамики неголономных систем в большой мере связано с необходимостью решения задач динамики твердого тела. Методы ее в настоящее время нашли широкое применение в задачах современной техники.

“Зарождение динамики неголономных систем, по-видимому, следует отнести к тому времени, когда всеобъемлющий и блестящий аналитический формализм, созданный трудами Эйлера и Лагранжа, оказался, к всеобщему удивлению, неприменимым к очень простым механическим задачам о качении без проскальзывания твердого тела по плоскости” – так сказано в монографии Ю.И. Неймарка, Н.А. Фуфаева “Динамика неголономных систем”, 1967, с.7.

Основные результаты по составлению уравнений движения неголономной системы – тела, катящегося без скольжения по заданной поверхности, принадлежат П.В. Воронцу (Известия Киевского университета, 1903). Однако наиболее общие результаты получил С.А. Чаплыгин, 1897. Он рассматривает задачу о качении без скольжения тяжелого твердого тела по горизонтальной плоскости, записывает уравнения движения, используя теоремы о движении центра масс и об изменении момента количества движения. С.А. Чаплыгиным, 1903, дано полное решение задачи о качении шара по горизонтальной плоскости при весьма общих предположениях о распределении масс в шаре и при единственном допущении, что центр масс шара совпадает с его геометрическим центром. Результат, близкий к результату С.А. Чаплыгина, был получен спустя 55 лет в [28] – поставлена и решена задача о качении шара по наклонной плоскости при тех же допущениях – Е.И. Харламова.

Движение тела с неподвижной точкой, подчиненного неголономной связи, впервые рассматривал Г.К. Суслов. Иную, чем у Г.К.Суслова, реализацию такой же связи предложил В.В. Вагнер, 1941. Тожественность задач Суслова и Вагнера была отмечена впервые в работе [29], там принято во внимание действие сил тяжести, задача получила решение в эллиптических функциях, дано геометриче-

ское истолкование движения, проведено полное исследование для случая быстрого вращения.

К 1892 г. относится результат Д.К. Бобылева – решение задачи о движении шара с гироскопом внутри. В 1893 г. Н.Е. Жуковский публикует работу “О гироскопическом шаре Д.К. Бобылева”, где указывает простейший путь получения минимально необходимого количества уравнений и геометрическими методами исследует траекторию точки касания шара с плоскостью. Созданные в последние годы в Донецке методы построения полных решений и алгоритмы дали возможность А.П. Харламову [30] построить методом аксоидов полное решение задачи о периодическом движении гиросшара Жуковского. В последующих работах описанная Н.Е. Жуковским конструкция обобщена – гиросшар катится без скольжения по поверхности тела, которое вращается вокруг неподвижной вертикальной оси. В рассмотренных вариантах найдены точные решения. Математическая модель задачи Чаплыгина о качении шара по горизонтальной плоскости была дополнена и для случая равномерного вращения основания.

Вкладом в неголономную механику явилось и сообщение [31] донецких ученых о новом виде связи – **неголономном шарнире**. Эта модель использована в работах Г.В. Мозалевской, М.Е. Лесиной, А.П. Харламова.

Говоря о несвободных телах, нельзя не сказать о работе П.В. Харламова “Связи и реакции”, 1992. В ней обсуждаются возникновение и толкования понятий – связь, реакция связи, реализация связи. Некоторые из них подвергнуты критике с позиций прикладной механики.

Простота кинематических уравнений Харламова для неподвижного годографа – два конечных соотношения и квадратура – дала возможность решить идущую от Пуансо **проблему геометрического (кинематического) описания движения**. Донецкими учеными построено полное решение во многих случаях интегрируемости как классических задач о движении тяжелого твердого тела и гиростата, имеющих неподвижную точку, так и задач о движении тела в пространстве.

Чрезвычайно интересно решение С.В. Ковалевской, в нем сохранены независимыми все начальные условия, а четвертый интеграл имеет высокую степень. Однако предвидение Р. Граммеля “...наглядная интерпретация случая С.В. Ковалевской вряд ли воз-

можно ..." не сбылось. Именно в Донецке есть очень большое количество работ, посвященных исследованию картины движения тела в случае С.В. Ковалевской и в частных случаях этого решения – работы И.Н. Гашененко [32], В.И. Коваля, А.П. Харламова, П.В. Харламова и др. В 1989 г. состоялся в Москве Симпозиум, посвященный 100-летию присуждения С.В. Ковалевской премий французской и шведской Академий за мемуар о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки. Выступить с докладом "Значение результатов С.В. Ковалевской в динамике твердого тела" пригласили из Донецка П.В. Харламова.

Первые работы по построению полных решений носили качественный характер, что снижало наглядность результатов. Появление персональных компьютеров и мощного математического обеспечения дало толчок к созданию компьютерных алгоритмов, позволяющих рассчитывать ориентацию тела в режиме реального времени и наблюдать процесс движения на экране при произвольных значениях параметров и начальных условий, – А.П. Харламов, 1983-1985. Конечные выражения для матрицы перехода от подвижного пространства к неподвижному через компоненты подвижного годографа и кинематические характеристики неподвижного годографа были найдены в [33], 1981. Построение всей картины движения реального объекта было выполнено во многих случаях интегрируемости – И.Н. Гашененко, Д.Н. Кравчук, Е.К. Сергеев, А.П. Харламов, М.П. Харламов и др.

Уравнения матрицы перехода оказались применимыми и для построения геометрической картины закручивания тонких упругих стержней под воздействием концевых сил – Е.К. Сергеев, М.П. Харламов. Алгоритм реализован при визуализации изгиба и закручивания стержня в решениях Д.Н. Горячева и А.И. Докшевича.

Все результаты привели к уточнению понятия полного решения. Об этом были доклады на симпозиумах Международного союза по теоретической и прикладной механике в 1974 г. в Мюнхене и в 1982 г. в Турине (Kharlamov M.P., Kharlamov P.V. "To solve a problem of rigid body dynamics. What does it mean?").

Если принять, что задача механики – прогнозирование движения, то именно описанные методы визуализации и участвуют в ее решении.

Получены уравнения аксоидов и для общего случая пространственного движения тела. В качестве направляющей линии аксоида

взята его горловая линия, для которой предложены различные формы уравнений.

Заметим, что существующие программы позволяют представить на мониторе движение тела не только для любого случая интегрируемости, но и по информации об угловой скорости и векторе вертикали, полученной численно или экспериментально.

В механике появляются и новые вопросы и новые методы.

Идеи исследования глобальных топологических свойств фазового пространства системы, восходящие к А. Пуанкаре, были развиты и формализованы в работе американского математика С. Смейла, 1970. В Донецке был создан новый аппарат исследования фазовой топологии, основанный на изучении проекций интегральных многообразий на вспомогательные пространства (в частности, на сферу Пуассона). Полностью исследована фазовая топология случаев Эйлера – Жуковского, Чаплыгина – Сретенского, Ковалевской, построено бифуркационное множество в задаче Клебша и т.д. Результаты исследований М.П. Харламова, 1977–1984, собраны в монографии [19].

Методами геометрического и топологического анализа исследуют механические системы с нелинейными по скоростям первыми интегралами И.Н. Гашененко.

Традиционной тематикой в отделе является изучение периодических решений. И.Н. Гашененко с учениками провел детальный компьютерный анализ показателей Ляпунова всех известных одно и двухпараметрических семейств точных решений (Стеклова, Докшевича, Ковалевского, Горячева, Гриоли и др.). В пространстве параметров выделены области динамической неустойчивости этих решений [34].

Интегрируемы ли в общем случае уравнения Эйлера – Пуассона? Как устроено фазовое пространство интегрируемых гамильтоновых систем? Если это пространство, заполненное хаотическими фазовыми траекториями (так называемый “детерминированный хаос”), а регулярные траектории взвешены “островами в хаотическом море”, то каковы свойства хаотичности движений? В отыскании ответов на подобные вопросы уже включились донецкие механики – А.М. Ковалев и другие.

Можно сказать, что к интегрируемым и неинтегрируемым задачам динамики твердого тела в Донецке применены самые перспективные методы глобального анализа механических систем, привле-

кающие аппарат дифференциальной геометрии, топологии, теории гладких многообразий и гладких отображений, КАМ-теории, теории Морса.

Исследования сотрудников отделов прикладной механики и технической механики за сорок лет существования института нельзя разделить на периоды, о которых можно было бы определенно сказать, кто чем в каждый период занимался. Направлений много, в чем можно было убедиться из вышеизложенного. Почти у всех есть результаты в каждом из них: в построении решений с инвариантными соотношениями, в геометрическом истолковании решений, в исследовании устойчивости тел и систем тел. К какому-то решению могли обратиться разные авторы, изучая его с разных точек зрения. Один автор мог возвращаться, уже вместе с учениками, к предмету своего исследования снова и снова, привлекая новые идеи и методы.

В 2003 г. Александр Михайлович Ковалев избран членом-корреспондентом Национальной Академии наук Украины.

В 1980 г. издана книга "Динамика твердого тела с одной неподвижной точкой. Библиографический указатель литературы (1749 – 1979 гг.)". Составитель Л.А. Степанова. В книге собрана вся, насколько это возможно, относящаяся к указанному научному направлению литература за 230 лет. В перечне фамилий, внесенных в Указатель, 26 принадлежат донецким ученым (работавшим к моменту составления указателя лишь 15 лет).

В продолжение традиций ученых механиков и математиков П.В. Харламов в последние двадцать лет очень много внимания уделял анализу оснований своей науки – механики. Свои мысли он изложил в статьях, препринтах по методологии оснований механики: "Почему спорят механики об основаниях своей науки?", "Механика и теория относительности" и др. и монографии "Очерки об основаниях механики. Мифы, заблуждения и ошибки", изданной в Науковій думке в 1995 г., [35].

На VII Международной конференции "Устойчивость, управление и динамика твердого тела" в Донецке проведена дискуссия "Динамика твердого тела: прошлое, настоящее, будущее". Для обсуждения были предложены вопросы:

- решение задачи о движении твердого тела вокруг неподвижной точки – эволюция понятия за последние 240 лет;

- интегрируемые системы – первые интегралы и инвариантные соотношения, методы построения точных решений, гамильтонов формализм;

- качественные методы – геометрическое описание движений, методы визуализации, топология и механика;

- теория устойчивости движения;

- неинтегрируемость уравнений Эйлера – Пуассона, качественные эффекты, характеризующие неинтегрируемость;

- результаты компьютерного моделирования;

- обобщенные уравнения Эйлера – Пуассона, гироскат, тело с жидкостью, физически различные силовые поля, уравнения Кирхгофа, уравнения Д.Гриоли и М.П. Харламова;

- динамика систем связанных тел.

Это, по существу, и перечень направлений, в которых работают и имеют результаты ученые отделов прикладной и технической механики ИПММ, их коллеги из ДонГТУ, ДонГУ, из НИИ Донецкого региона.

Список источников.

1. Харламов П.В. Лекции по динамике твердого тела. Ч. 1. – Новосибирск: изд-во НГУ, 1965. – 221 с.
2. Харламов П.В. Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. 1974. – Вып. 6. – С. 15-24.
3. Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А. Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. – Киев: Наук. Думка, 1978. – 296 с.
4. Докшевич А.И. Решение в конечном виде уравнений Эйлера- Пуассона. – Киев: Наук. думка, 1992. – 168 с.
5. Харламова Е.И. Сведение задачи о движении твердого тела, имеющего неподвижную точку, к одному уравнению. Новое частное решение этой задачи // Прикл. математика и механика. – 1966. – 30, вып.4. – С. 784-788.
6. Харламова Е.И., Мозалевская Г.В. Интегродифференциальное уравнение динамики твердого тела. – Киев: Наук. думка, 1986. – 296 с.
7. Лесина М.Е., Кудряшова Л.В. Новые постановки и решения задач динамики системы тел. – Донецк: Изд-во ДонГТУ, 1999. – 267 с.
8. Мозалевская Г.В., Хохлов А.И. Современное состояние задачи построения точных решений уравнений движения гироскопа в кардановом подвесе // Исследования по истории механики. – М.: Наука, 1983. – С. 60-100.
9. Харламов П.В. Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. 1972. – Вып. 4. – С. 52-73.
10. Лесина М.Е. Задача о движении системы твердых тел. – Донецк: Изд-во ДонГТУ, 1998.–156 с.
11. Коносевиц Б.И. Скорость ухода динамически неуравновешенного асинхронного гироскопа в кардановом подвесе // Механика твердого тела. 1974. – Вып. 6. – С. 121-126.
12. Харламов М.П. Гиросистемы // Механика твердого тела. 1987. – Вып. 19. – С.42-54.
13. Лесина М.Е. О математической модели гиросферы. – Донецк: Изд-во ДонГТУ, 1996. – 102 с.

14. Харламов П.В., Савченко А.Я. Про інтегрування рівнянь руху тіла, яке має порожнину, заповнену рідиною // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1968. – № 2. – С. 142-144.
15. Савченко А.Я. Устойчивость стационарных движений механических систем. – Киев: Наук. думка, 1977. – 160 с.
16. Савченко А.Я., Игнатъев А.О. Некоторые задачи устойчивости неавтономных динамических систем. – Киев: Наук. думка, 1989. – 208 с.
17. Савченко А.Я., Болграбская И.А., Кононыхин Г.А. Устойчивость движения систем связанных твердых тел. – Киев: Наук. думка, 1991. – 168с.
18. Харламов П.В. О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1963. – № 4. – С. 17-29.
19. Харламов М.П. Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1988. – 200 с.
20. Горр Г.В., Илюхин А.А., Ковалев А.М., Савченко А.Я. Нелинейный анализ поведения механических систем. – Киев: Наук. думка, 1984. – 287 с.
21. Харламова Е.И. О движении твердого тела вокруг неподвижной точки в центральном ньютоновском поле сил // Изв. Сибирского отделения АН СССР. – 1959. – Вып. 6. – С. 7-17.
22. Илюхин А.А. Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней. – Киев: Наук. думка, 1979. – 216с.
23. Илюхин А.А. О построении соотношений теории упругих стержней // Механика твердого тела. 1974. – Вып. 6. – С. 121-126.
24. Харламов М.П. Новый метод решения пространственных задач нелинейной теории упругих стержней // Механика твердого тела. 1982. – Вып. 14. – С. 116-123.
25. Ковалев А.М. Нелинейные задачи управления и наблюдения в теории динамических систем. – Киев: Наук. думка, 1980. – 175 с.
26. Ковалев А.М., Щербак В.Ф. Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость динамических систем. – Киев: Наук. думка, 1993. – 236 с.
27. Ковалев А.М. Уравнения инвариантных и ориентированных многообразий динамических систем // Докл. НАНУ. – 1998. – № 9. – С. 21-25.
28. Харламова Е.И. Качение шара по наклонной плоскости // Прикл. математика и механика. – 1958. – 22, вып.4. – С. 504-509.
29. Харламова-Забелина Е.И. Быстрое вращение твердого тела вокруг неподвижной точки при наличии неголономной связи // Вестн. Моск. ун-та. Сер. мат. и мех. – 1957. – № 6. – С. 25-34.
30. Харламов А.П. Построение полного решения для периодического движения гиросфера // Механика твердого тела. 1992. – Вып. 24. – С. 62-68.
31. Харламов А.П., Харламов М.П. Неголономный шарнир // Механика твердого тела. 1995. – Вып. 27. – С. 1-7.
32. Гашененко И.Н. Геометрический анализ двухчастотных квазипериодических движений гироскопа Ковалевской // Механика твердого тела. 1990. – Вып. 22. – С. 1-10.
33. Харламов М.П. О построении годографов угловой скорости тела, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. 1981. – Вып. 13. – С. 10-14.
34. Гашененко И.Н., Кучер Е.Ю. Характеристические показатели периодических решений уравнений Эйлера – Пуассона // Механика твердого тела. – 2002. – Вып. 32. – С. 50-59.
35. Харламов П.В. Очерки об основаниях механики. Мифы, заблуждения и ошибки. – Киев: Наук. думка, 1995. – 407 с.

Статья рекомендована к опубликованию.

Член-корреспондент НАН Украины, профессор

А.М. Ковалев