Міністерство освіти і науки України
Донецький національний технічний університет

Кафедра «Вища математика» ім. В.В. Пака

Збірник науково-методичних робіт

Випуск 5

Донецьк – 2007

УДК 51(07), 51, 519.216, 517.518.45, 517.9, 531.38, 539.5, 5:371.214.114 , 621.647.1:621.316.1

Рекомендовано до друку Радою Донецького Національного Технічного Університету
Протокол № 9 від 21.12. 2007 р.

Збірник науково-методичних робіт. - Вип. 5. - Донецьк: ДонНТУ, 2007. – 212 с.

В збірнику представлено різні напрямки застосування математичних методів до розв'язання інженерних задач, а саме, задач механіки твердого тіла, фізики магнітних явищ, статистичної фізики та інших.

Науково-методичні роботи є узагальненням досвіду викладачів кафедри по удосконалюванню математичної підготовки спеціалістів.

Видання розраховано на широке коло наукових робітників, а також аспірантів та студентів старших курсів університетів.

Адреса редакційної колегії : Україна, 83050, м. Донецьк, вул. Артема, 96, ДонНТУ, 3-й учбовий корпус, кафедра "Вища математика", тел. (062) 3010901.

Оценки погрешностей квадратных формул – общий подход

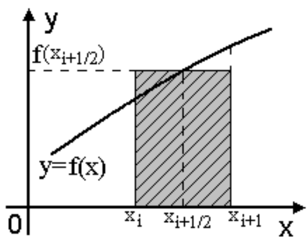
Локтионов И.К., Гусар Г.А., Локтионов К.И. *(мл.)*
Донецкий национальный технический университет

Предлагается общий подход для получения оценки модуля остаточного члена наиболее употребительных квадратурных формул – формул прямоугольников, трапеций и парабол – в курсе вычислительной математики.

Одним из важных этапов решения какой-либо задачи численными методами является оценка погрешности искомой величины. Так, при вычислении определённого интеграла с заданным шагом интегрирования приходится рассчитывать величину остаточного члена, используемой квадратурной формулы. Мажорантная оценка модуля остаточного члена может быть принята за абсолютную погрешность вычисления определённого интеграла.

Известно, что остаточный член формулы (средних) прямоугольников может быть получен путём предстевления подынтегральной функции по формуле Тейлора с сохранением квадратного члена.

В самом деле, пусть $f(x) \in C_2[x_i, x_i + h]$, $x_{i+1} = x_i + h$. Проинтерполируем $f(x)$ на этом отрезке многочленом $\varphi_0(x)$ нулевой степени, совпадающим с $f(x)$ в средней точке $\bar{x}_i = x_i + h/2 = x_{i+1/2}$, т.е. заменим $f(x)$ постоянной $f(x_i + h/2) = \varphi_0(x)$. Тогда



$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_i+h} \varphi_0(x)dx = h \cdot f(\bar{x}_i). \qquad (1)$$

Оценим погрешность интегрирования. Для этого рассмотрим разность

$$R_0(h) = \int_{x_i}^{x_i+h} f(x)dx - h \cdot f(\bar{x}_i). \qquad (2)$$

Представим $f(x)$ в виде

$$f(x) = f(\bar{x}_i) + f'(\bar{x}_i)(x - \bar{x}_i) + \frac{(x - \bar{x}_i)^2}{2} f''(\mu_i), \quad \mu_i \in (\bar{x}_i, x). \qquad (3)$$

Тогда

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x)dx = f(\bar{x}_i)\int_{x_i}^{x_i+h} dx + f'(\bar{x}_i)\int_{x_i}^{x_i+h} (x - \bar{x}_i)dx + \int_{x_i}^{x_i+h} \frac{(x - \bar{x}_i)^2}{2} f''(\mu_i)dx.$$

1-й интеграл в правой части равен $hf(\bar{x}_i)$. Можно показать, что 2-й интеграл

$$\int_{x_i}^{x_i+h}(x-\bar{x}_i)dx=\int_{x_i}^{x_i+h}(x-x_i-h/2)dx=0\,.$$

Заметим, что для вычисления 3-го интеграла применяется *обобщённая теорема о среднем*: если $f(x),g(x)\in C[a;b]$, причём $g(x)\ge 0$ на $[a;b]$, то существует такая точка $\nu\in[a;b]$, что $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\nu)\int_a^b g(x)dx$.

$$\int_{x_i}^{x_i+h}\frac{(x-\bar{x}_i)^2}{2}f''(\mu_i)dx=\frac{f''(\xi_i)}{2}\int_{x_i}^{x_i+h}(x-x_i-h/2)^2dx=\frac{f''(\xi_i)\cdot h^3}{24}\,, \qquad (4)$$

где $\xi_i\in[x_i,\,x_i+h]$. Окончательно получаем

$$\int_{x_i}^{x_i+h}f(x)dx=f(\bar{x}_i)h+\frac{f''(\xi_i)\cdot h^3}{24}\,. \qquad (5)$$

Погрешность метода на отрезке $[x_i,x_i+h]$ равна $R_0(x)=f''(\xi_i)\cdot h^3/24$.

Пусть теперь $f(x)\in C_2[a,b]$. Разобьём отрезок интегрирования $[a,b]$ на частичные отрезки $[x_i,x_i+h]$, $(i=0,1,2,\ldots,n-1)$, на каждом из которых применим формулу (5), в результате

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{x_1}f(x)dx+\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx+\ldots+\int_{x_{n-2}}^{x_{n-1}}f(x)dx+\int_{x_{n-1}}^{b}f(x)dx=$$

$$=\frac{b-a}{n}\left[f(\bar{x}_0)+f(\bar{x}_1)+\ldots+f(\bar{x}_{n-2})+f(\bar{x}_{n-1})\right]+\frac{h^3}{24}\left[f''(\xi_0)+f''(\xi_1)+\ldots+f''(\xi_{n-1})\right]=$$

$$=\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f(\bar{x}_i)+\frac{h^3}{24}\sum_{i=0}^{n-1}f''(\xi_i)\,. \qquad (6)$$

Квадратурная формула (6) называется формулой открытого типа, т.к. в неё не входят значения $f(a)$ и $f(b)$, она является точной. Погрешность интегрирования на всём отрезке $[a,b]$ равна

$$R_n(h)=\frac{h^3}{24}\sum_{i=0}^{n-1}f''(\xi_i)\,. \qquad (7)$$

Преобразуем правую часть (7). Поскольку $f(x)\in C_2[a,b]$, то найдётся точка $\xi\in[a;b]$ такая, что $f(\xi)=\left[f(\xi_1)+f(\xi_2)+\ldots+f(\xi_n)\right]/n$ (лемма*). Учитывая это равенство, остаточный член (7) можно записать в виде

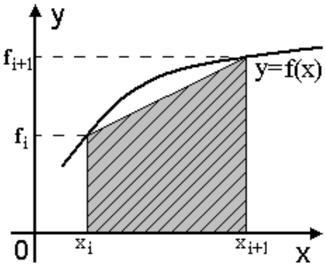
$$R_n(h)=h^2(b-a)f''(\xi)/24\,. \qquad (8)$$

С точки зрения практики имеет значение не точная формула (8), а априорная оценка погрешности сверху

$$\left|I - I_n^{прям.}\right| = \left|R_n(h)\right| \le \frac{h^2(b-a)}{24} \max_{x\in[a,b]}\left|f''(x)\right|. \qquad (9)$$

Этот способ применим и для случая формул трапеций и парабол. Однако при этом можно получить не точное значение остатка, а лишь его оценку сверху, что для практических потребностей вполне достаточно.

Метод трапеций



Пусть $f(x) \in C_2[x_i; x_{i+1}]$, $x_{i+1} = x_i + h$, h - шаг интегрирования, $f_i = f(x_i)$, $f_{i+1} = f(x_{i+1})$, $f_i' = f'(x_i)$. Представим $f(x)$ по формуле Тейлора относительно точки x_i с остаточным членом в форме Лагранжа

$$f(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + \frac{(x - x_i)^2}{2} f''(\mu_i), \quad \mu_i \in (x_i, x). \qquad (10)$$

Тогда

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x)dx = f_i\int_{x_i}^{x_i+h} dx + f_i'\int_{x_i}^{x_i+h}(x - x_i)dx + f''(\nu_i)\int_{x_i}^{x_i+h}\frac{(x-x_i)^2}{2}dx =$$

$$= hf_i + h^2 f_i'/2 + h^3 f''(\nu_i)/6, \qquad \nu_i \in [x_i,\, x_{i+1}]. \qquad (11)$$

С помощью разложения (10)вычислим значение $f(x)$ в точке $x_{i+1} = x_i + h$

$$f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + h^2 f''(\eta_i)/2, \qquad \eta_i \in (x_i,\, x_{i+1}).$$

Откуда выразим $hf'(x_i) = f(x_i + h) - f(x_i) - h^2 f''(\eta_i)/2$ и подставим в (11)

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x)dx = \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1}) + h^3\left(\frac{1}{6}f''(\nu_i) - \frac{1}{4}f''(\eta_i)\right). \qquad (12)$$

Формула (12) называется формулой трапеций с остаточным членом, поскольку значение интеграла $\int_{x_i}^{x_i+h} f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1}) = S$ приближенно равно площади трапеции с высотой h и основаниями f_i и f_{i+1}. 2-е слагаемое в правой части (12) представляет собой остаточный член, который подвергнем преобразованию. Если отрезок $[x_i,\, x_{i+1}]$ мал, то $\nu_i \approx \eta_i$, а т.к. $f''(x) \in C[x_i,\, x_{i+1}]$, то и $f''(\nu_i) \approx f''(\eta_i)$. Тогда, полагая значения $f''(\nu_i)$ и $f''(\eta_i)$ равными значению $f''(x)$ в некоторой точке $\xi_i \in (x_i,\ x_{i+1})$, получим следующее выражение для остаточного члена

$$R_1 = h^3\left(\frac{1}{6} f''(\nu_i) - \frac{1}{4} f''(\eta_i)\right) \approx -\frac{h^3}{12} f''(\xi_i). \tag{13}$$

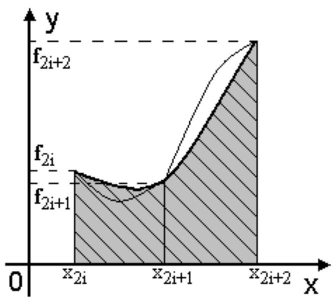
Предполагая теперь, что $f(x) \in C_2[a;\, b]$ и используя свойство аддитивности определённого интеграла, найдём

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx\right) \approx h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1}\left[f(x_i) - \frac{h^2}{12} f''(\xi_i)\right]\right) =$$

$$= h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right) - \frac{h^2(b-a)}{12} f''(\xi), \tag{14}$$

где $\xi \in (a;b)$. Формула трапеций (14) является точной для линейных функций, в этом случае погрешность метода равна нулю.

Метод парабол



Пусть $f(x) \in C_4[x_{2i}; x_{2i}+2h]$, $x_{2i+1} = x_{2i} + h$, $x_{2i+2} = x_{2i} + 2h$, h - шаг интегрирования, обозначим $f_{2i} = f(x_{2i})$, $f_{2i}^{(k)} = f^{(k)}(x_{2i})$, $k = 1, 2, 3, 4$, $f_{2i+1} = f(x_{2i}+h)$, $f_{2i+2} = f(x_{2i}+2h)$. Формула Тейлора для $f(x)$ относительно точки x_{2i} с остаточным членом в форме Лагранжа имеет вид

$$f(x) = f_{2i} + (x - x_{2i})f'_{2i} + \frac{(x-x_{2i})^2 f''_{2i}}{2} + \frac{(x-x_{2i})^3 f'''_{2i}}{6} + \frac{(x-x_{2i})^4 f^{(4)}(\mu_i)}{24}$$

$$\mu_i \in (x_{2i},\ x). \tag{15}$$

Вычислим интеграл

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx = f_{2i}\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} dx + f'_{2i}\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} (x - x_{2i})dx + f''_{2i}\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} \frac{(x-x_{2i})^2}{2}dx +$$

$$+ f'''_{2i}\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} \frac{(x-x_{2i})^3}{6}dx + f^{(4)}(\nu_i)\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} \frac{(x-x_{2i})^4}{24}dx =$$

$$= 2hf_{2i} + 2h^2 f'_{2i} + \frac{4}{3}h^3 f''_{2i} + \frac{2}{3}h^4 f'''_{2i} + \frac{4}{15}h^5 f^{(4)}(\nu_i), \quad \nu_i \in [x_{2i}, x_{2i+2}]. \qquad (16)$$

При вычислении последнего интеграла в (16) использована обобщённая теорема о среднем. Найдём теперь с помощью (15) значения f_{2i+1} и f_{2i+2}

$$f_{2i+1} = f_{2i} + hf'_{2i} + \frac{h^2}{2} f''_{2i} + \frac{h^3}{6} f'''_{2i} + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(\eta_i), \qquad \eta_i \in (x_{2i},\, x_{2i+1}) \qquad (17)$$

$$f_{2i+2} = f_{2i} + 2hf'_{2i} + 2h^2 f''_{2i} + \frac{4h^3}{3} f'''_{2i} + \frac{2h^4}{3} f^{(4)}(\zeta_i), \quad \zeta_i \in (x_{2i},\, x_{2i+2}) \qquad (18)$$

Умножив (18) на h, выразим

$$2h^2 f'_{2i} = hf_{2i+2} - hf_{2i} - 2h^3 f''_{2i} - \frac{4h^4}{3} f'''_{2i} - \frac{2h^5}{3} f^{(4)}(\zeta_i) \qquad (19)$$

и подставим в правую часть (16), в результате получим

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx = h[f_{2i} + f_{2i+2}] - \frac{2h^3}{3} f''_{2i} - \frac{2h^4}{3} f'''_{2i} + h^5\left(\frac{4f^{(4)}(\nu_i)}{15} - \frac{2f^{(4)}(\zeta_i)}{3}\right). \qquad (20)$$

Из формул (17) и (18) находим

$$2f_{2i+1} - f_{2i+2} = f(x_{2i}) - h^2 f''_{2i} - h^3 f'''_{2i} + h^4\left(\frac{f^{(4)}(\eta_i)}{12} - \frac{2f^{(4)}(\zeta_i)}{3}\right) \qquad (21)$$

откуда после умножения обеих частей (21) на $2h/3$ поимеем

$$\frac{2h^3}{3} f''_{2i} + \frac{2h^4}{3} f'''_{2i} = \frac{2h}{3}(f_{2i} - 2f_{2i+1} + f_{2i+2}) + h^5\left(\frac{f^{(4)}(\eta_i)}{18} - \frac{4f^{(4)}(\zeta_i)}{9}\right). \qquad (22)$$

Использование (22) позволяет записать искомый интеграл

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i}+2h} f(x)dx = \frac{h}{3}[f_{2i} + 4f_{2i+1} + f_{2i+2}] + h^5\left(\frac{4f^{(4)}(\nu_i)}{15} - \frac{f^{(4)}(\eta_i)}{18} - \frac{2f^{(4)}(\zeta_i)}{9}\right). \qquad (23)$$

Таким образом, получена каноническая формула парабол (Симпсона) с остаточным членом. Название формулы связано с тем, что интеграл $\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx$ приближенно равен площади $S = h[f_{2i} + 4f_{2i+1} + f_{2i+2}]/3$ криволинейной трапеции, ограниченной сверху параболой, проходящей через точки (x_{2i}, f_{2i}), (x_{2i+1}, f_{2i+1}), (x_{2i+2}, f_{2i+2}). Остаточный член формулы парабол, который представлен 2-м слагаемым в правой части (9), можно записать в виде

$$R_2 = h^5\left(\frac{4f^{(4)}(\nu_i)}{15} - \frac{f^{(4)}(\eta_i)}{18} - \frac{2f^{(4)}(\zeta_i)}{9}\right) \approx -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi_i), \quad \xi_i \in (x_{2i},\, x_{2i+2}) \tag{24}$$

В такой компактной форме остаточный член может быть записан с учётом малости отрезка $[x_{2i}, x_{2i+2}]$. При этом можно принять, что $\nu_i \approx \eta_i \approx \zeta_i$. Тогда в силу непрерывности $f^{(4)}(x)$ на $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ будет выполняться приближенное равенство $f^{(4)}(\nu_i) \approx f^{(4)}(\eta_i)$. Обозначив эти значения через $f^{(4)}(\xi_i)$, где $\xi_i \in (x_{2i},\, x_{2i+2})$, получаем формулу (24).

Предположим, теперь что $f(x) \in C_4[a;\, b]$ и разобьём $[a;b]$ на $2n$ частичных отрезков $[x_{2i}; x_{2i+1}]$ длины $h = (b-a)/2n$. На каждом из отрезков $[x_{2i}; x_{2i} + 2h]$ применим формулы (23) и (24)

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{n-1}[f_{2i} + 4f_{2i+1} + f_{2i+2}] - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h^5 f^{(4)}(\xi_i)}{90} =$$

$$= \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{n-1}[f_{2i} + 4f_{2i+1} + f_{2i+2}] - \frac{h^4(b-a)}{180} f^{(4)}(\xi), \tag{25}$$

где $\xi \in [a;b]$. При вычислении суммы $-\dfrac{h^5}{90}\sum\limits_{i=0}^{n-1} f^{(4)}(\xi_i)$ была использована лемма* и учтено, что $h = (b-a)/2n$.

Оценку погрешности квадратурной формулы (24) можно представить в следующем виде

$$\left|I - I_n^{параб}\right| = \left|R_n^{параб}\right| \le \frac{h^4(b-a)}{180} \max_{x\in[a;b]}\left|f^{(4)}(x)\right|.$$

Общий подход к оценке погрешностей квадратурных формул позволит более успешно осваивать раздел вычислительной математики, связанный с численным интегрированием.

Литература

1. Пирумов У. Г. Численные методы. – ООО « Дрофа »,2003,224 с.
2. Исаков В. Н. Элементы численных методов.–Изд. «Академия»,2003,192 с.
3. Киреев В. И., Пантелеев А. В. Численные методы в примерах и задачах. – Изд. « МАИ »,2000,376 с.
4. Иванова Т. П., Пухова Г. В. Программирование и вычеслительная математика. – Изд. « Просвещение »,1978,320 с.

СОДЕРЖАНИЕ