

Міністерство освіти і науки України  
Донецький національний технічний університет

Кафедра «Вища математика» ім. В.В. Пака

## **Збірник науково-методичних робіт**

Випуск 5

Донецьк – 2007

УДК 51(07), 51, 519.216, 517.518.45, 517.9, 531.38, 539.5,  
5:371.214.114 , 621.647.1:621.316.1

Рекомендовано до друку Радою Донецького Національного  
Технічного Університету  
Протокол № 9 від 21.12. 2007 р.

**Збірник науково-методичних робіт.** - Вип. 5. - Донецьк:  
ДонНТУ, 2007. – 212 с.

В збірнику представлено різні напрямки застосування математичних методів до розв'язання інженерних задач, а саме, задач механіки твердого тіла, фізики магнітних явищ, статистичної фізики та інших.

Науково-методичні роботи є узагальненням досвіду викладачів кафедри по удосконалюванню математичної підготовки спеціалістів.

Видання розраховано на широке коло наукових робітників, а також аспірантів та студентів старших курсів університетів.

**Редакційна колегія:** проф. Улітін Г.М. - редактор, проф. Петренко О.Д., проф. Лесіна М.Ю, проф. Косолапов Ю.Ф., доц. Мироненко Л.П., ст. викл. Локтіонов І.К. (ДонНТУ).

Адреса редакційної колегії : Україна, 83050, м. Донецьк, вул. Артема, 96, ДонНТУ, 3-й учбовий корпус, кафедра "Вища математика", тел. (062) 3010901.

© Донецький Національний технічний університет, 2007 р.

## Оценки погрешностей квадратных формул – общий подход

*Локтионов И.К., Гусар Г.А., Локтионов К.И. (мл.)  
Донецкий национальный технический университет*

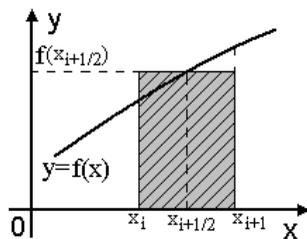
Предлагается общий подход для получения оценки модуля остаточного члена наиболее употребительных квадратурных формул – формул прямоугольников, трапеций и парабол – в курсе вычислительной математики.

Одним из важных этапов решения какой-либо задачи численными методами является оценка погрешности искомой величины. Так, при вычислении определённого интеграла с заданным шагом интегрирования приходится рассчитывать величину остаточного члена, используемой квадратурной формулы. Мажорантная оценка модуля остаточного члена может быть принята за абсолютную погрешность вычисления определённого интеграла.

Известно, что остаточный член формулы (средних) прямоугольников может быть получен путём представления подынтегральной функции по формуле Тейлора с сохранением квадратного члена.

В самом деле, пусть  $f(x) \in C_2[x_i, x_i + h]$ ,  $x_{i+1} = x_i + h$ . Проинтерполируем  $f(x)$  на этом отрезке многочленом  $\varphi_0(x)$  нулевой степени, совпадающим с  $f(x)$  в средней точке  $\bar{x}_i = x_i + h/2 = x_{i+1}/2$ , т.е. заменим  $f(x)$  постоянной  $f(x_i + h/2) = \varphi_0(x)$ . Тогда

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x) dx \approx \int_{x_i}^{x_i+h} \varphi_0(x) dx = h \cdot f(\bar{x}_i). \quad (1)$$



Оценим погрешность интегрирования. Для этого рассмотрим разность

$$R_0(h) = \int_{x_i}^{x_i+h} f(x) dx - h \cdot f(\bar{x}_i). \quad (2)$$

Представим  $f(x)$  в виде

$$f(x) = f(\bar{x}_i) + f'(\bar{x}_i)(x - \bar{x}_i) + \frac{(x - \bar{x}_i)^2}{2} f''(\mu_i), \quad \mu_i \in (\bar{x}_i, x). \quad (3)$$

Тогда

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x) dx = f(\bar{x}_i) \int_{x_i}^{x_i+h} dx + f'(\bar{x}_i) \int_{x_i}^{x_i+h} (x - \bar{x}_i) dx + \int_{x_i}^{x_i+h} \frac{(x - \bar{x}_i)^2}{2} f''(\mu_i) dx.$$

1-й интеграл в правой части равен  $hf(\bar{x}_i)$ . Можно показать, что 2-й интеграл

$$\int_{x_i}^{x_i+h} (x - \bar{x}_i) dx = \int_{x_i}^{x_i+h} (x - x_i - h/2) dx = 0.$$

Заметим, что для вычисления 3-го интеграла применяется *обобщённая теорема о среднем*: если  $f(x), g(x) \in C[a, b]$ , причём  $g(x) \geq 0$  на  $[a, b]$ , то существует такая точка  $\nu \in [a, b]$ , что  $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\nu) \int_a^b g(x)dx$ .

$$\int_{x_i}^{x_i+h} \frac{(x - \bar{x}_i)^2}{2} f''(\mu_i) dx = \frac{f''(\xi_i)}{2} \int_{x_i}^{x_i+h} (x - x_i - h/2)^2 dx = \frac{f''(\xi_i) \cdot h^3}{24}, \quad (4)$$

где  $\xi_i \in [x_i, x_i + h]$ . Окончательно получаем

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x) dx = f(\bar{x}_i)h + \frac{f''(\xi_i) \cdot h^3}{24}. \quad (5)$$

Погрешность метода на отрезке  $[x_i, x_i + h]$  равна  $R_0(x) = f''(\xi_i) \cdot h^3 / 24$ .

Пусть теперь  $f(x) \in C_2[a, b]$ . Разобьём отрезок интегрирования  $[a, b]$  на частичные отрезки  $[x_i, x_{i+1}]$ , ( $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ), на каждом из которых применим формулу (5), в результате

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} f(x) dx + \int_{x_{n-1}}^b f(x) dx = \\ &= \frac{b-a}{n} [f(\bar{x}_0) + f(\bar{x}_1) + \dots + f(\bar{x}_{n-2}) + f(\bar{x}_{n-1})] + \frac{h^3}{24} [f''(\xi_0) + f''(\xi_1) + \dots + f''(\xi_{n-1})] = \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(\bar{x}_i) + \frac{h^3}{24} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i). \end{aligned} \quad (6)$$

Квадратурная формула (6) называется формулой открытого типа, т.к. в неё не входят значения  $f(a)$  и  $f(b)$ , она является точной. Погрешность интегрирования на всём отрезке  $[a, b]$  равна

$$R_n(h) = \frac{h^3}{24} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i). \quad (7)$$

Преобразуем правую часть (7). Поскольку  $f(x) \in C_2[a, b]$ , то найдётся точка  $\xi \in [a, b]$  такая, что  $f(\xi) = [f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_n)]/n$  (лемма\*). Учитывая это равенство, остаточный член (7) можно записать в виде

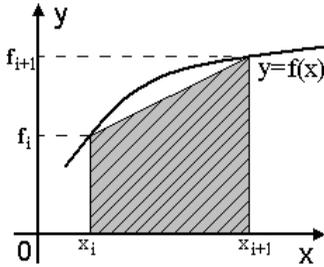
$$R_n(h) = h^2(b-a)f''(\xi)/24. \quad (8)$$

С точки зрения практики имеет значение не точная формула (8), а априорная оценка погрешности сверху

$$|I - I_n^{нпрям}| = |R_n(h)| \leq \frac{h^2(b-a)}{24} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|. \quad (9)$$

Этот способ применим и для случая формул трапеций и парабол. Однако при этом можно получить не точное значение остатка, а лишь его оценку сверху, что для практических потребностей вполне достаточно.

### Метод трапеций



Пусть  $f(x) \in C_2[x_i; x_{i+1}]$ ,  $x_{i+1} = x_i + h$ ,  $h$  - шаг интегрирования,  $f_i = f(x_i)$ ,  $f_{i+1} = f(x_{i+1})$ ,  $f'_i = f'(x_i)$ . Представим  $f(x)$  по формуле Тейлора относительно точки  $x_i$  с остаточным членом в форме Лагранжа

$$f(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + \frac{(x - x_i)^2}{2} f''(\mu_i), \quad \mu_i \in (x_i, x). \quad (10)$$

Тогда

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x) dx = f_i \int_{x_i}^{x_i+h} dx + f'_i \int_{x_i}^{x_i+h} (x - x_i) dx + f''(v_i) \int_{x_i}^{x_i+h} \frac{(x - x_i)^2}{2} dx = hf_i + h^2 f'_i / 2 + h^3 f''(v_i) / 6, \quad v_i \in [x_i, x_{i+1}]. \quad (11)$$

С помощью разложения (10) вычислим значение  $f(x)$  в точке  $x_{i+1} = x_i + h$

$$f(x_i + h) = f(x_i) + hf'_i + h^2 f''(\eta_i) / 2, \quad \eta_i \in (x_i, x_{i+1}).$$

Откуда выразим  $hf'_i = f(x_i + h) - f(x_i) - h^2 f''(\eta_i) / 2$  и подставим в (11)

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x) dx = \frac{h}{2} (f_i + f_{i+1}) + h^3 \left( \frac{1}{6} f''(v_i) - \frac{1}{4} f''(\eta_i) \right). \quad (12)$$

Формула (12) называется формулой трапеций с остаточным членом,

поскольку значение интеграла  $\int_{x_i}^{x_i+h} f(x) dx \approx \frac{h}{2} (f_i + f_{i+1}) = S$  приближенно

равно площади трапеции с высотой  $h$  и основаниями  $f_i$  и  $f_{i+1}$ . 2-е слагаемое в правой части (12) представляет собой остаточный член, который подвергнем преобразованию. Если отрезок  $[x_i, x_{i+1}]$  мал, то  $v_i \approx \eta_i$ , а т.к.  $f''(x) \in C[x_i, x_{i+1}]$ , то и  $f''(v_i) \approx f''(\eta_i)$ . Тогда, полагая

значения  $f''(v_i)$  и  $f''(\eta_i)$  равными значению  $f''(x)$  в некоторой точке  $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$ , получим следующее выражение для остаточного члена

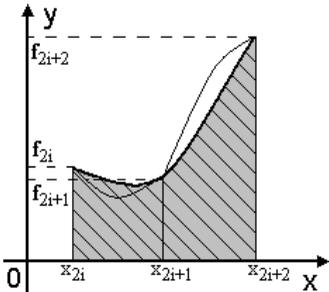
$$R_1 = h^3 \left( \frac{1}{6} f''(v_i) - \frac{1}{4} f''(\eta_i) \right) \approx -\frac{h^3}{12} f''(\xi_i). \quad (13)$$

Предполагая теперь, что  $f(x) \in C_2[a; b]$  и используя свойство аддитивности определённого интеграла, найдём

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \right) \approx h \left( \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \left[ f(x_i) - \frac{h^2}{12} f''(\xi_i) \right] \right) = \\ &= h \left( \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right) - \frac{h^2(b-a)}{12} f''(\xi), \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\xi \in (a; b)$ . Формула трапеций (14) является точной для линейных функций, в этом случае погрешность метода равна нулю.

### Метод парабол



Пусть  $f(x) \in C_4[x_{2i}; x_{2i} + 2h]$ ,  
 $x_{2i+1} = x_{2i} + h$ ,  $x_{2i+2} = x_{2i} + 2h$ ,  $h$  - шаг интегрирования, обозначим  $f_{2i} = f(x_{2i})$ ,  
 $f_{2i}^{(k)} = f^{(k)}(x_{2i})$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ ,  
 $f_{2i+1} = f(x_{2i} + h)$ ,  $f_{2i+2} = f(x_{2i} + 2h)$ .  
 Формула Тейлора для  $f(x)$  относительно точки  $x_{2i}$  с остаточным членом в форме Лагранжа имеет вид

$$f(x) = f_{2i} + (x - x_{2i}) f'_{2i} + \frac{(x - x_{2i})^2}{2} f''_{2i} + \frac{(x - x_{2i})^3}{6} f'''_{2i} + \frac{(x - x_{2i})^4}{24} f^{(4)}(\mu_i) \quad \mu_i \in (x_{2i}, x). \quad (15)$$

Вычислим интеграл

$$\begin{aligned} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x) dx &= f_{2i} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} dx + f'_{2i} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} (x - x_{2i}) dx + f''_{2i} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} \frac{(x - x_{2i})^2}{2} dx + \\ &+ f'''_{2i} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} \frac{(x - x_{2i})^3}{6} dx + f^{(4)}(v_i) \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} \frac{(x - x_{2i})^4}{24} dx = \end{aligned}$$

$$= 2hf_{2i} + 2h^2 f'_{2i} + \frac{4}{3}h^3 f''_{2i} + \frac{2}{3}h^4 f'''_{2i} + \frac{4}{15}h^5 f^{(4)}(v_i), \quad v_i \in [x_{2i}, x_{2i+2}]. \quad (16)$$

При вычислении последнего интеграла в (16) использована обобщённая теорема о среднем. Найдём теперь с помощью (15) значения  $f_{2i+1}$  и  $f_{2i+2}$

$$f_{2i+1} = f_{2i} + hf'_{2i} + \frac{h^2}{2} f''_{2i} + \frac{h^3}{6} f'''_{2i} + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(\eta_i), \quad \eta_i \in (x_{2i}, x_{2i+1}) \quad (17)$$

$$f_{2i+2} = f_{2i} + 2hf'_{2i} + 2h^2 f''_{2i} + \frac{4h^3}{3} f'''_{2i} + \frac{2h^4}{3} f^{(4)}(\zeta_i), \quad \zeta_i \in (x_{2i}, x_{2i+2}) \quad (18)$$

Умножив (18) на  $h$ , выразим

$$2h^2 f'_{2i} = hf_{2i+2} - hf_{2i} - 2h^3 f''_{2i} - \frac{4h^4}{3} f'''_{2i} - \frac{2h^5}{3} f^{(4)}(\zeta_i) \quad (19)$$

и подставим в правую часть (16), в результате получим

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx = h[f_{2i} + f_{2i+2}] - \frac{2h^3}{3} f''_{2i} - \frac{2h^4}{3} f'''_{2i} + h^5 \left( \frac{4f^{(4)}(v_i)}{15} - \frac{2f^{(4)}(\zeta_i)}{3} \right). \quad (20)$$

Из формул (17) и (18) находим

$$2f_{2i+1} - f_{2i+2} = f(x_{2i}) - h^2 f''_{2i} - h^3 f'''_{2i} + h^4 \left( \frac{f^{(4)}(\eta_i)}{12} - \frac{2f^{(4)}(\zeta_i)}{3} \right) \quad (21)$$

откуда после умножения обеих частей (21) на  $2h/3$  получим

$$\frac{2h^3}{3} f''_{2i} + \frac{2h^4}{3} f'''_{2i} = \frac{2h}{3} (f_{2i} - 2f_{2i+1} + f_{2i+2}) + h^5 \left( \frac{f^{(4)}(\eta_i)}{18} - \frac{4f^{(4)}(\zeta_i)}{9} \right). \quad (22)$$

Использование (22) позволяет записать искомый интеграл

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx = \frac{h}{3} [f_{2i} + 4f_{2i+1} + f_{2i+2}] + h^5 \left( \frac{4f^{(4)}(v_i)}{15} - \frac{f^{(4)}(\eta_i)}{18} - \frac{2f^{(4)}(\zeta_i)}{9} \right). \quad (23)$$

Таким образом, получена каноническая формула парабол (Симпсона) с остаточным членом. Название формулы связано с тем, что

интеграл  $\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx$  приближенно равен площади

$S = h[f_{2i} + 4f_{2i+1} + f_{2i+2}]/3$  криволинейной трапеции, ограниченной сверху параболой, проходящей через точки  $(x_{2i}, f_{2i})$ ,  $(x_{2i+1}, f_{2i+1})$ ,  $(x_{2i+2}, f_{2i+2})$ . Остаточный член формулы парабол, который представлен 2-м слагаемым в правой части (9), можно записать в виде

$$R_2 = h^5 \left( \frac{4f^{(4)}(v_i)}{15} - \frac{f^{(4)}(\eta_i)}{18} - \frac{2f^{(4)}(\zeta_i)}{9} \right) \approx -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi_i), \quad \xi_i \in (x_{2i}, x_{2i+2}) \quad (24)$$

В такой компактной форме остаточный член может быть записан с учётом малости отрезка  $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ . При этом можно принять, что  $v_i \approx \eta_i \approx \zeta_i$ . Тогда в силу непрерывности  $f^{(4)}(x)$  на  $[x_{2i}, x_{2i+2}]$  будет выполняться приближенное равенство  $f^{(4)}(v_i) \approx f^{(4)}(\eta_i)$ . Обозначив эти значения через  $f^{(4)}(\xi_i)$ , где  $\xi_i \in (x_{2i}, x_{2i+2})$ , получаем формулу (24).

Предположим, теперь что  $f(x) \in C_4[a; b]$  и разобьём  $[a; b]$  на  $2n$  частичных отрезков  $[x_{2i}; x_{2i+1}]$  длины  $h = (b-a)/2n$ . На каждом из отрезков  $[x_{2i}; x_{2i+2}]$  применим формулы (23) и (24)

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x) dx \approx \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{n-1} [f_{2i} + 4f_{2i+1} + f_{2i+2}] - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h^5 f^{(4)}(\xi_i)}{90} = \\ &= \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{n-1} [f_{2i} + 4f_{2i+1} + f_{2i+2}] - \frac{h^4(b-a)}{180} f^{(4)}(\xi), \end{aligned} \quad (25)$$

где  $\xi \in [a; b]$ . При вычислении суммы  $-\frac{h^5}{90} \sum_{i=0}^{n-1} f^{(4)}(\xi_i)$  была использована лемма\* и учтено, что  $h = (b-a)/2n$ .

Оценку погрешности квадратурной формулы (24) можно представить в следующем виде

$$|I - I_n^{nара\bar{a}}| = |R_n^{nара\bar{a}}| \leq \frac{h^4(b-a)}{180} \max_{x \in [a; b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Общий подход к оценке погрешностей квадратурных формул позволит более успешно осваивать раздел вычислительной математики, связанный с численным интегрированием.

### Литература

1. Пирумов У. Г. Численные методы. – ООО «Дрофа», 2003, 224 с.
2. Исаков В. Н. Элементы численных методов. – Изд. «Академия», 2003, 192 с.
3. Киреев В. И., Пантелеев А. В. Численные методы в примерах и задачах. – Изд. «МАИ», 2000, 376 с.
4. Иванова Т. П., Пухова Г. В. Программирование и вычислительная математика. – Изд. «Просвещение», 1978, 320 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>1. Улитин Г.М.</b> Об одном способе доказательства формулы Тейлора.....	3
<b>2. Малащенко В. В., Малащенко Т.И.</b> Надбарьерное скольжение краевой дислокации через дислокационный лес .....	6
<b>3. Малащенко В. В.</b> Динамика дислокаций в примесных кристаллах.....	10
<b>4. Малащенко В. В.</b> Выход винтовых дислокаций на стационарный режим движения.....	17
<b>5. Зиновьева Я.В.</b> Новое точное решение задачи о движении двух гироскопов Лагранжа, сочлененных идеальным сферическим шарниром, на инвариантном соотношении специального вида.....	21
<b>6. Лесина М.Е., Зиновьева Я.В.</b> Частное решение задачи о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа.....	32
<b>7. Лесина М.Е., Зиновьева Я.В.</b> Частное решение уравнений движения системы двух гироскопов Лагранжа, при одном условии, связывающем циклические постоянные.....	42
<b>8. Руссиян С. А.</b> Исследование влияния переходных процессов на устойчивость работы аппарата АЗУР-1 при коммутации кабельного ответвления сети.....	65
<b>9. Лесина М.Е., Гоголева Н.Ф.</b> Уравнение аксоидов задачи о движении двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром при нулевом значении момента количества движения системы.....	70
<b>10. Лесина М.Е., Гоголева Н.Ф.</b> Аксоиды для нового точного решения в задаче о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром.....	96
<b>11. Гончаров А.Н.</b> Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и определитель Вронского.....	125
<b>12. Ярхо Т.А.</b> Особенности изложения темы числовые ряды в курсе высшей математики технического университета .....	127
<b>13. Наконечная Т.В., Никулин А.В.</b> Применение таксонометрического метода при планировании математической подготовки студентов технических направлений .....	144
<b>14. Варварецька Г.А., Клімова Т.І., Сапронова Т.М.</b> Система роботи викладачів математики вищої школи в центрі довузівської підготовки ОНМА .....	152
<b>15. Евсеева Е. Г., Савин А. И.</b> Опорный конспект по теории множеств....	161
<b>16. Косолапов Ю.Ф., Ляшенко С. В.</b> Некоторые применения дельта-функции во втузе.....	171
<b>17. Алексеева І.В., Гайдей В.О., Диховичний О.О., Коновалова Н.Р., Федорова Л.Б.</b> Курс дистанційної освіти « Лінійна алгебра та Аналітична геометрія » .....	178

<b>18. Ткач Ю.М.</b> Міжпредметні зв'язки при вивченні математики та основ економіки в класах економічного профілю.....	187
<b>19. Локтионов И.К., Гусар Г.А., Локтионов К.И.</b> Оценки погрешностей квадратных формул – общий подход.....	196
<b>20. Ехилевский С.Г.</b> Дискретность спектральной плотности и представление для обобщенных функции Дирака и Хевисайда.....	202
<b>21. Ехилевский С.Г.</b> Разложение в ряд Фурье таблично заданных функций.....	206