

МЕТОД РАСЧЕТА МАССИВОВ КООРДИНАТ ТОЧЕК СОПРЯЖЕНИЙ КОНТУРОВ РАДИАЛЬНЫХ СЕЧЕНИЙ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ КОЛЕС

Яковченко А. В., Ивлева Н. И.

(ГБУЗ «Донецкий национальный технический университет», г. Донецк)

Созданы универсальные алгоритмы для расчета координат точек сопряжений контуров сечений колес любых типов, которые являются основой компьютерных программ проектирования профилей колес и калибровок.

Проектирование профилей чистовых и черновых колес является важным этапом в процессе разработки калибровок валков и штампов [1]. Применение для этих целей компьютерных программ, не специализированных для условий колесопрокатного производства [2], требует значительных затрат времени.

Первые попытки автоматизированного проектирования профилей колес основывались на разработке аналитических формул для расчета координат каждой точки сопряжения контура сечения колеса [3, 4]. Они предназначались для профилей колес с плоскоконическими и криволинейными с центральным выгибом дисками. Ясно, что такие решения оказались громоздкими. Кроме того, для различных конфигураций колес необходимо было каждый раз разрабатывать новые формулы.

Целью настоящей работы является создание универсальных алгоритмов для расчета координат точек сопряжений контуров сечений колес любых типов. Указанные координаты (рис.1) являются базовой информацией для построения контура радиального сечения колеса, расчета его площади и радиуса центра тяжести, а также объема и массы колеса.

Координаты точек сопряжений определяются в зависимости от координат «скелетных» точек (см. рис.1а). Эти точки принадлежат исходному «скелетному» контуру, который при проектировании профилей колес может содержать не только отрезки прямых, но и дуги окружностей. Основным отличительным признаком «скелетного» контура колеса от сопряженного является то, что он еще не содержит дуг сопряжений указанных выше элементов, выполняемых радиусами, которые имеются на чертеже заказчика. Координаты «скелетных» точек вычисляются исходя из известных линейных размеров, а также углов, уклонов, радиусов и диаметров.

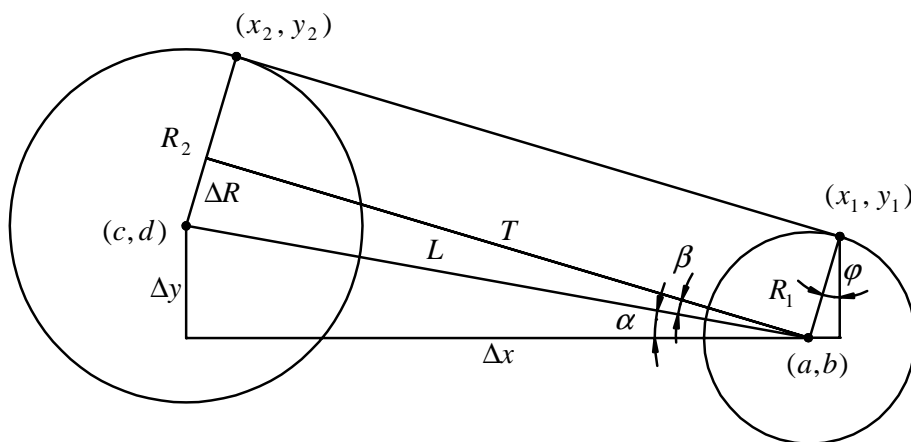
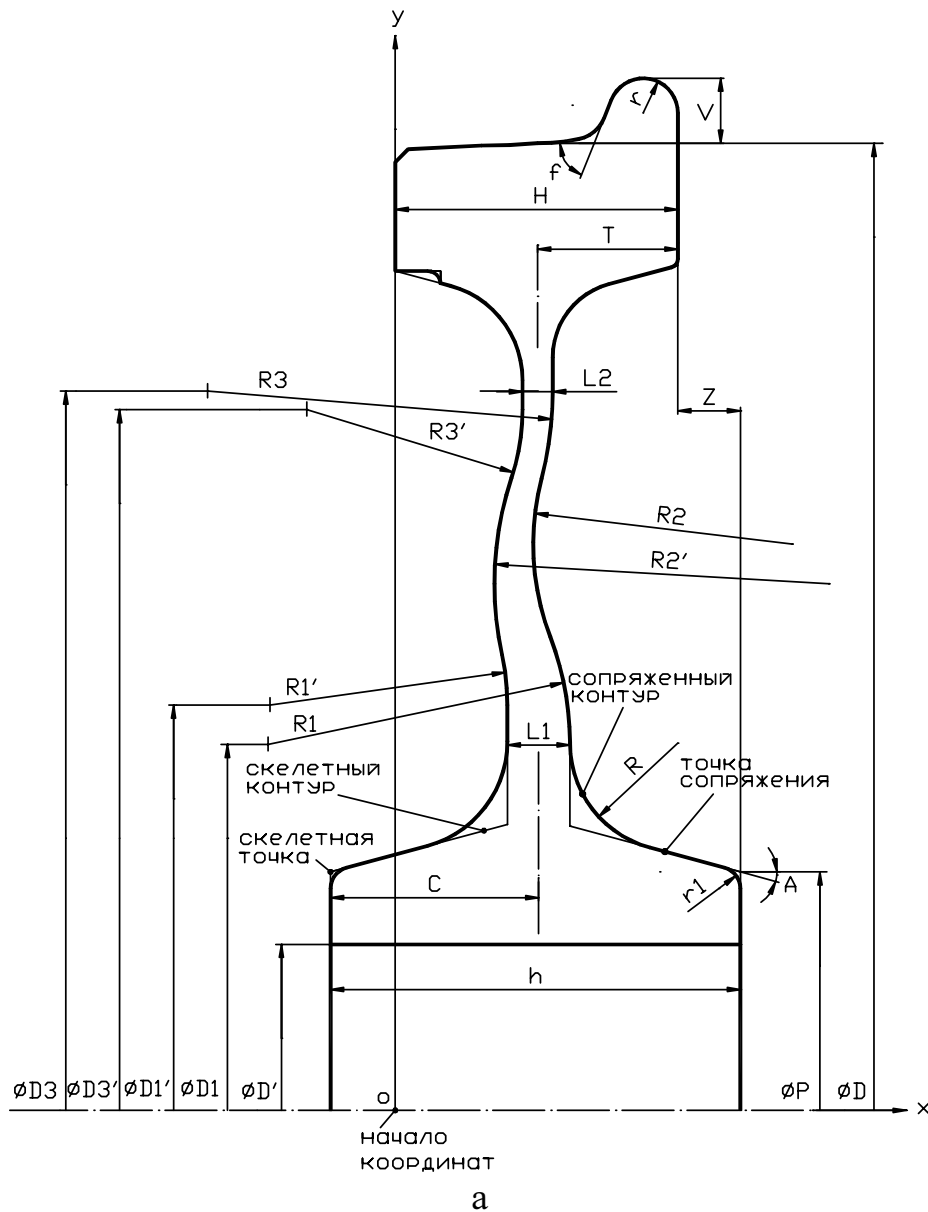
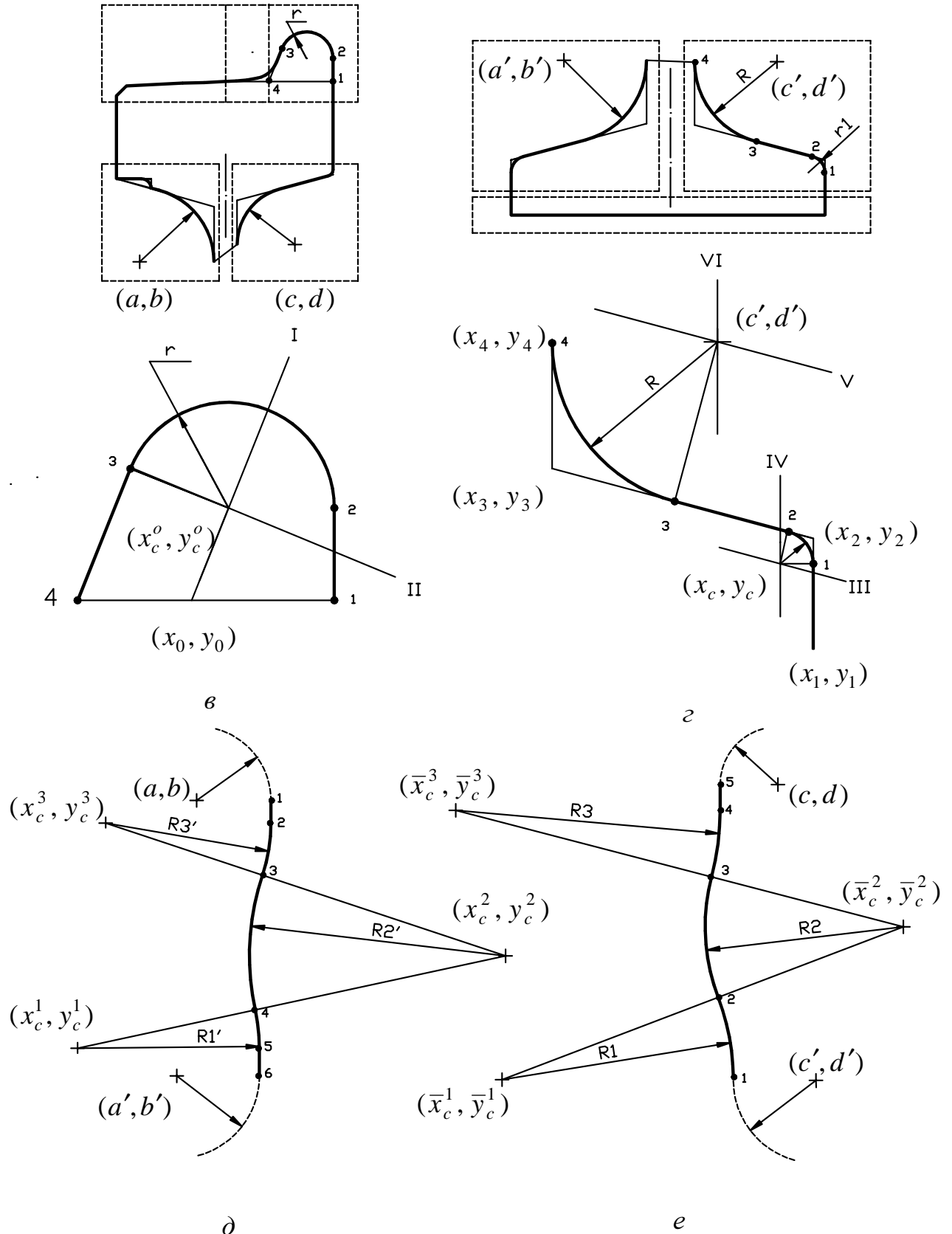


Рисунок 1 – Построение контура сечения чистового колеса: а - сопряженный и «скелетный» контур чистового колеса; б - определение точек сопряжений двух окружностей с общей касательной



Продолжение рисунка 1 – Построение контура сечения чистового колеса: б - профиль обода и его фрагмент (гребень); з - профиль ступицы и ее фрагмент; д - образующая диска с наружной стороны колеса; е - образующая диска с внутренней стороны колеса

Рассмотрим порядок формирования информации о профиле колеса. Контуры сечений колес состоят из отрезков прямых линий и дуг окружностей, которые в точках их соединения в большинстве случаев сопрягаются по касательной. Вместе с тем, они могут включать и соединенные под углом отрезки прямых, а также отрезки прямых и дуги окружностей, сопряженные не по касательной. В дальнейшем все точки соединения указанных элементов контуров колес будем называть точками сопряжений.

Каждая точка сопряжения задается двумя координатами x , y и параметром r , характеризующим связь текущей точки с последующей. Если указанные точки соединены прямой, то $r=0$, если дугой, то r равен радиусу окружности, которой принадлежит эта дуга. Знак r устанавливается следующим образом: если при обходе контура против хода часовой стрелки центр воображаемой окружности находится слева от него, то r присваивается знак «+», если справа – знак «-» [5].

В процессе расчетов точки сопряжений нумеруются. При этом обход контура выполняется против хода часовой стрелки. Начальной точкой отсчета может быть любая указанная выше точка контура по усмотрению калибровщика.

Начало координат расположено на пересечении двух перпендикулярных линий, одна из которых совпадает с осью отверстия ступицы, а вторая – с линией, ограничивающей обод с наружной стороны колеса (см. рис.1а). Координаты точек сопряжений элементов обода, диска и ступицы вычисляются в единой системе координат, но, как правило, независимо друг от друга и в определенной последовательности. При объединении полученных массивов не требуется дополнительных преобразований координат.

В процессе разработки метода расчета координат точек сопряжений контура сечения колеса потребовалось представление решения ряда задач аналитической геометрии в виде выражений, зависящих от координат «скелетных» точек. К ним, в частности, относится определение параметров уравнения прямой, проходящей через две точки, а также прямых, проходящих через одну точку параллельно или перпендикулярно заданной прямой. Пользуясь указанными параметрами, а также выражениями для определения координат точек пересечений двух прямых, окружности с прямой или с другой окружностью, будут решены задачи вычисления координат точек сопряжений контура сечения колеса.

В настоящей работе выбран путь создания ряда алгоритмов и соответствующих им программ, которые позволяют определить указанные параметры и координаты в перечисленных выше задачах. При этом результаты решения одной задачи используются в качестве исходной информации для другой и так до получения результата, то есть определения координат искомой точки сопряжения. При этом для расчета координат различных точек сопряжений, в том числе для колес, имеющих разные конфигурации,

используются одни и те же алгоритмы и программы. Это и определяет рациональность и компактность программ, а также, в конечном итоге, их надежность в работе. Рассмотрим эти задачи, основываясь на известных формулах аналитической геометрии [6].

П.1. Определение параметров уравнения прямой, проходящей через две точки. Уравнение прямой линии, проходящей через две точки с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) имеет вид [6]

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (1)$$

Из выражения $(x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1)$ после преобразований находим, что $(y_2 - y_1)x + y(x_1 - x_2) + x_2 y_1 - x_1 y_2 = 0$. Отсюда следует, что параметры прямой линии $Ax + By + C = 0$, проходящей через точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , определяются следующими выражениями:

$$A = y_2 - y_1; \quad B = x_1 - x_2; \quad C = x_2 y_1 - x_1 y_2. \quad (2)$$

П.2. Определение параметров уравнения прямой, проходящей через заданную точку параллельно прямой, проходящей через две точки. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку (x_0, y_0) параллельно прямой $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$, имеет вид [6]

$$(y - y_0) = k(x - x_0), \quad (3)$$

где $k = -\frac{A_1}{B_1}$.

Подставив в (3) значение k , получим

$$A_1 x + B_1 y - (A_1 x_0 + B_1 y_0) = 0. \quad (4)$$

Пусть прямая линия $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ проходит через точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) . Согласно выражению (2) $A_1 = y_2 - y_1$, $B_1 = x_1 - x_2$.

Представим уравнение (4) в виде

$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0. \quad (5)$$

Тогда

$$A_2 = y_2 - y_1; \quad B_2 = x_1 - x_2; \quad C_2 = -(A_2 x_0 + B_2 y_0). \quad (6)$$

П.3. Определение параметров уравнения прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно к прямой, проходящей через две точки. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку (x_0, y_0) перпендикулярно к прямой $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, имеет вид [6]

$$(y - y_0) = k(x - x_0), \quad (7)$$

где $k = \frac{B_1}{A_1}$.

Подставив в (7) значение k , получим

$$-B_1x + A_1y + (B_1x_0 - A_1y_0) = 0. \quad (8)$$

Пусть прямая линия $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ проходит через точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) . Согласно выражению (2) $A_1 = y_2 - y_1$, $B_1 = x_1 - x_2$.

Представим уравнение (8) в виде

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

(9)

Тогда

$$A_2 = x_2 - x_1; \quad B_2 = y_2 - y_1; \quad C_2 = -(A_2x_0 + B_2y_0).$$

(10)

П.4. Определение координат точки пересечения двух прямых. Пусть две непараллельные прямые заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, в которых параметры A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 имеют вид (2). Координаты (x_p, y_p) точки пересечения этих прямых получаются путем совместного решения их уравнений:

$$x_p = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}; \quad y_p = \frac{C_1A_2 - C_2A_1}{A_1B_2 - A_2B_1}. \quad (11)$$

П.5. Определение координат точек пересечения прямой и окружности. Для определения координат точек пересечения прямой и окружности подставим уравнение прямой линии $Ax + By + C = 0$ в уравнение окружности с радиусом R и центром в точке (a, b) [6] $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. После преобразований получим квадратное уравнение

$$(A^2 + B^2)y^2 - 2[A^2b - B(C + Aa)]y + [(C + Aa)^2 + A^2B^2 - A^2R^2] = 0. \quad (12)$$

Решая его относительно y , найдем два корня

$$y_{1,2} = \frac{A^2 b - B(C + Aa) \pm \sqrt{D}}{A^2 + B^2}, \quad (13)$$

$$D = [A^2 b - B(C + Aa)]^2 - (A^2 + B^2) \cdot [(C + Aa)^2 + A^2 B^2 - A^2 R^2]. \quad (14)$$

Если $D < 0$, то окружность и прямая не пересекаются. Соответствующие значения $x_{1,2}$ определим из выражения, получающегося после подстановки $y_{1,2}$ в уравнение прямой $Ax + By + C = 0$.

$$x_{1,2} = -\frac{B}{A} y_{1,2} - \frac{C}{A}. \quad (15)$$

Таким образом, имеются две точки пересечения прямой с окружностью. Выбрать одну из них можно, если заранее известно, какой дуге окружности, верхней или нижней, принадлежит эта точка. Для этого достаточно проанализировать значения $y_{1,2}$. Иногда удобнее при выборе решения уравнения (12) анализировать значения $x_{1,2}$. Так как конфигурация отдельных элементов контура сечения колеса всегда известна, то выбор решения предопределен заранее. Его реализация выполняется разработанной программой в автоматизированном режиме.

П.6. Определение координат точек пересечения двух окружностей. Пусть

заданы две окружности с радиусами R_1 и R_2 , центры которых расположены соответственно в точках (a_1, b_1) и (a_2, b_2) . Их уравнения имеют вид [6]

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = R_1^2; \quad (16)$$

$$(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = R_2^2. \quad (17)$$

Координаты точек пересечения этих окружностей получаются путем совместного решения их уравнений. Выполним тождественное преобразование системы двух уравнений (16) и (17) заменив второе из них разностью этих уравнений. Получим

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = R_1^2; \quad (18)$$

$$2(a_2 - a_1)x + 2(b_2 - b_1)y + (a_1^2 - a_2^2 + b_1^2 - b_2^2 + R_2^2 - R_1^2) = 0. \quad (19)$$

Уравнение (19) является уравнением прямой линии. Таким образом, задача пересечения двух окружностей (16) и (17) свелась к задаче пересечения

чения окружности (18) и прямой (19). Такого вида задача рассмотрена в П.5.

П.7. Определение координат центра дуги окружности. Пусть дана дуга окружности с радиусом R . Центр дуги находится на расстоянии R , как от начальной точки дуги (x_H, y_H) , так и от конечной (x_K, y_K) . Поэтому центром дуги является одна из точек пересечения двух окружностей с радиусами R , центры которых находятся в точках (x_H, y_H) и (x_K, y_K)

$$(x - x_H)^2 + (y - y_H)^2 = R^2; \quad (20)$$

$$(x - x_K)^2 + (y - y_K)^2 = R^2. \quad (21)$$

Задача пересечения двух окружностей рассмотрена в П.6.

П.8. Определение координат центра дуги, сопрягающей два отрезка прямых. Центр дуги, сопрягающей два отрезка прямых, имеющих общую точку, находится на пересечении двух других прямых, которые параллельны каждому из рассматриваемых отрезков и расположены на расстоянии, равном радиусу дуги сопряжения R в области угла φ , образованного данными отрезками ($0 < \varphi < \pi$).

Пусть (x_1, y_1) и (x_2, y_2) координаты начальной и конечной точки первого отрезка, а (x_2, y_2) и (x_3, y_3) – второго отрезка.

Найдем уравнение прямой $Ax + By + C = 0$, перпендикулярной к первому отрезку в точке (x_2, y_2) . Решение этой задачи изложено в П.3. Из него следует, что $A = x_2 - x_1$, $B = y_2 - y_1$, $C = -(Ax_2 + By_2)$.

Далее найдем пересечение прямой $Ax + By + C = 0$ и окружности с радиусом R , центр которой поместим в точку (x_2, y_2) . Решение данной задачи изложено в П.5. Из двух точек пересечения прямой с окружностью выбирается та, которая лежит в области угла φ . Обозначим ее координаты (x_{p1}, y_{p1}) . Теперь найдем уравнение прямой $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, проходящей через точку (x_{p1}, y_{p1}) , параллельно первому отрезку. Решение подобной задачи изложено в П.2. Из него следует, что

$$A_1 = y_2 - y_1; \quad B_1 = x_1 - x_2; \quad C_1 = -(A_1x_{p1} + B_1y_{p1}). \quad (22)$$

Так же определяются параметры уравнения прямой $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, параллельной второму отрезку и проходящей через точку (x_{p2}, y_{p2}) . Точка (x_{p2}, y_{p2}) находится на расстоянии R от второго отрезка по перпендикуляру, а параметры указанной прямой будут следующими:

$$A_2 = y_3 - y_2; \quad B_2 = x_2 - x_3; \quad C_2 = -(A_2x_{p2} + B_2y_{p2}). \quad (23)$$

Точка пересечения прямых (22) и (23) и будет центром дуги, сопрягающей два отрезка. Определение ее координат изложено в П.4.

П.9. Определение координат центра дуги, сопрягающей отрезок прямой и дугу окружности. Пусть дан отрезок прямой с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) и дуга с радиусом r и центром в точке (a, b) , имеющая с ним общую точку. Найдем центр дуги с радиусом R , которая сопрягает указанные отрезок и дугу.

Очевидно, что он лежит на пересечении прямой, параллельной рассматриваемому отрезку, которая расположена от него на расстоянии R , и окружности с радиусом $|r| \pm |R|$ и центром в точке (a, b) . Выбор знака \pm зависит от взаимного расположения исходного отрезка и дуги, которое при известной конфигурации основных элементов колеса определено однозначно.

Задача нахождения параметров уравнения прямой, параллельной отрезку и расположенной от него на расстоянии R , рассмотрена в П.8. Ее решение представлено выражением (22). Уравнение окружности с радиусом $|r| \pm |R|$ и центром в точке (a, b) и имеет вид

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = (|r| \pm |R|)^2. \quad (24)$$

Решение задачи пересечения прямой и окружности рассмотрено в П.5.

П.10. Определение координат точки сопряжения отрезка прямой с дугой окружности. Пусть дан отрезок прямой с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) и центр дуги сопряжения (a, b) . Чтобы найти координаты точки сопряжения, лежащей на данном отрезке, необходимо из центра (a, b) провести прямую, перпендикулярную данному отрезку до точки пересечения с ним, которая и является искомой точкой сопряжения.

Параметры прямой линии $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, проходящей через точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) определяются, как изложено в П.1, следующими выражениями:

$$A_1 = y_2 - y_1; \quad B_1 = x_1 - x_2; \quad C_1 = x_2y_1 - x_1y_2. \quad (25)$$

Параметры прямой линии $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, проведенной из центра (a, b) перпендикулярно данному отрезку, согласно П.3, определяются следующими выражениями:

$$A_2 = x_2 - x_1; \quad B_2 = y_2 - y_1; \quad C_2 = -(A_2a + B_2b). \quad (26)$$

Координаты точки пересечения прямых линий $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ определяются по формуле (11), приведенной в П.4.

П.11. Определение координат точки сопряжения двух дуг окружностей. Пусть даны дуга окружности с радиусом r и центром в точке (a, b) и дуга окружности с центром (c, d) , имеющие общую точку сопряжения по касательной. Чтобы найти координаты этой точки, необходимо провести прямую через точки (a, b) и (c, d) до точки пересечения с одной из дуг, которая и является искомой точкой сопряжения.

Параметры прямой линии $Ax + By + C = 0$, проходящей через точки (a, b) и (c, d) , определяются, как изложено в П.1, следующими выражениями:

$$A = d - b; \quad B = a - c; \quad C = cb - ad. \quad (27)$$

Уравнение окружности с центром в точке (a, b) имеет вид

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2. \quad (28)$$

Решение задачи пересечения прямой и окружности рассмотрено в П.5.

П.12. Определение координат точек сопряжения двух окружностей с общей касательной. Пусть заданы две окружности с радиусами R_1, R_2 и центрами в точках (a, b) и (c, d) соответственно (см. рис.1б). Пусть (x_1, y_1) и (x_2, y_2) искомые координаты точек сопряжений указанных окружностей с прямой, проведенной к ним по касательной.

Расстояние между центрами окружностей определяется по формуле $L = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, где $\Delta x = a - c$, $\Delta y = d - b$. Построим прямоугольный треугольник с катетами Δx и Δy и гипотенузой L . Угол, заключенный между катетом Δx и гипотенузой L , обозначим α .

Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами $\Delta R = R_2 - R_1$, T и гипотенузой L . Катет T , равный расстоянию между точками сопряжений (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , определяется из этого треугольника по формуле $T = \sqrt{L^2 - \Delta R^2}$. Угол, заключенный между катетом T и гипотенузой L , обозначим β .

Угол φ наклона прямой, проходящей через центр окружности (a, b) и точку сопряжения (x_1, y_1) , к вертикали равен другому углу, величина которого
есть сумма углов α и β (см. рис.1б).

Из выражений $\frac{x_1 - a}{R_1} = \sin \varphi$ и $\frac{y_1 - b}{R_1} = \cos \varphi$, с учетом вышесказанного найдем искомые координаты точки сопряжения x_1, y_1 :

$$x_1 = a + R_1 (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta); \quad y_1 = b + R_1 (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta).$$

В окончательном виде имеем:

$$\begin{aligned} x_1 &= a + R_1 \left(\frac{\Delta y}{L} \cdot \frac{T}{L} + \frac{\Delta x}{L} \cdot \frac{\Delta R}{L} \right); \\ y_1 &= b + R_1 \left(\frac{\Delta x}{L} \cdot \frac{T}{L} - \frac{\Delta y}{L} \cdot \frac{\Delta R}{L} \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Координаты точки сопряжения x_2, y_2 находятся из соотношений

$$\frac{x_2 - c}{R_2} = \frac{x_1 - a}{R_1}; \quad \frac{y_2 - d}{R_2} = \frac{y_1 - b}{R_1}. \quad (30)$$

Если радиус окружности R_2 равен 0, то имеем частную задачу определения по формулам (29) координат точки сопряжения касательной, проведенной из точки (c, d) к окружности с радиусом R_1 .

Сформулируем основные положения метода расчета координат точек сопряжений контура сечения колеса. Определение указанных координат выполняется в следующей последовательности:

- 1) контур сечения колеса рассматривается состоящим из трех частей: обода, ступицы и диска;
- 2) обод, ступица и диск, в свою очередь, представляются совокупностью отдельных элементов, схемы которых разработаны и имеются в соответствующих библиотеках созданной компьютерной программы;
- 3) для каждого из указанных выше элементов определяется «скелетный» и сопряженный контур с использованием решений задач, изложенных в П.1- П.12;
- 4) формируются массивы координат точек «скелетного» и сопряженного контура обода и ступицы без учета их сопряжения с диском;
- 5) определяются координаты центров дуг, сопрягающих диск с ободом и ступицей;
- 6) формируются массивы координат точек «скелета» и сопряжений для образующих диска с внутренней и наружной стороны колеса, учитывая сопряжения диска с ободом и ступицей;
- 7) формируются массивы координат точек «скелетного» и сопряженного контура сечения колеса путем объединения соответствующих точек обода, диска и ступицы.

На рис. 1а показан чертеж профиля колеса с буквенными обозначениями размеров, на основании которых ниже будет выполнен вывод формул для расчета координат точек «скелетного» и сопряженного контура. На базе рис.1в-е будут показаны этапы этого расчета.

Как указывалось выше, контуры сечения обода и ступицы представляются фиксированным количеством элементов (см. рис.1в, г), для каждого из которых в зависимости от их конфигурации вычисляются координаты точек сопряжений. Для примера выделим из контуров обода и ступицы по одному элементу. В ободке выбран гребень (см. рис.1в), в ступице - элемент с внутренней стороны колеса, который является торцевой и наружной поверхностью ступицы, включающей дугу сопряжения (см.рис.1г). Рассмотрим, как выполняются эти расчеты.

Учитывая положение начала координат и указанные на рис.1а размеры профиля колеса, определим координаты центра дуги гребня, имеющей радиус r

$$x_c^o = H - r; \quad y_c^o = \frac{D}{2} + V - r. \quad (31)$$

Очевидно, что точки 1 и 2 контура гребня имеют следующие координаты:

$$x[1] = H; \quad y[1] = \frac{D}{2}; \quad x[2] = H; \quad y[2] = y_c^o. \quad (32)$$

Для определения координат точки 3 найдем вначале координаты точки (x_0, y_0) :

$$x_0 = x_c^o - \frac{V - r}{\operatorname{tg}(f)}; \quad y_0 = \frac{D}{2}. \quad (33)$$

Затем восстановим перпендикуляр из точки (x_c^o, y_c^o) отрезка прямой с координатами (x_0, y_0) и (x_c^o, y_c^o) . Параметры этой прямой, согласно П.3, имеют вид:

$$A_1 = x_c - x_0; \quad B_1 = y_c - y_0; \quad C_1 = -(A_1 x_c + B_1 y_c). \quad (34)$$

Координаты точки 3 $x[3], y[3]$ находятся в результате пересечения прямой (34) и окружности с радиусом r и центром (x_c^o, y_c^o) (см. П.5). Ясно, что из двух точек пересечения следует выбрать ту, у которой абсцисса меньше.

Координаты точки 4 определяются по следующим формулам:

$$x[4] = x[3] - \frac{y[3] - \frac{D}{2}}{\operatorname{tg}(f)}; \quad y[4] = \frac{D}{2}. \quad (35)$$

В рассматриваемом случае скелетный контур гребня содержит точки 1-4, а сопряженный - точки 1-3.

Определим координаты точек сопряжений выбранного элемента ступицы, который представлен на рис.1г. Выразим через величины размеров профиля колеса координаты скелетных точек (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , (x_4, y_4) :

$$\begin{aligned} x_1 = H + Z; \quad y_1 = \frac{D'}{2}; \quad x_2 = H + Z; \quad y_2 = \frac{P}{2}; \\ x_3 = x_1 - h + C + \frac{L}{2}; \quad y_3 = (h - C - \frac{L}{2})\operatorname{tg}(A); \\ x_4 = x_3; \quad y_4 = y_3 + R. \end{aligned} \quad (36)$$

Центры дуг сопряжений (x_c, y_c) и (c', d') лежат на пересечении прямых III, IV и V, VI (см. рис.1г), параллельных другим прямым, проходящим через найденные точки (36). Точки сопряжений 1-4 определяются по методике, представленной в П.10.

После расчета координат точек контуров обода и ступицы становятся известными координаты центров дуг: (a, b) , (c, d) , (a', b') , (c', d') . В привязке к этим дугам, определяются координаты точек сопряжений по диску.

На рис. 1д,е показаны образующие диска с наружной и внутренней стороны колеса. Рассмотрим, как вычисляются точки сопряжений для рассматриваемой конфигурации диска.

Исходя из размеров колеса, показанных на рис.1а, сначала определим координаты центров дуг с радиусами $R1'$ и $R3'$ (см. рис.1д):

$$\begin{aligned} x_c^1 = H + Z - h + C - \frac{L1}{2} - R1'; \quad y_c^1 = \frac{D1'}{2}; \\ x_c^3 = H - T - \frac{L2}{2} - R3'; \quad y_c^3 = \frac{D3'}{2}. \end{aligned} \quad (37)$$

Центр дуги с радиусом $R2'$ (x_c^2, y_c^2) находится пересечением двух окружностей (см. П.6) с центрами в точках (x_c^1, y_c^1) и (x_c^3, y_c^3) и радиусами $R1' + R2'$ и $R3' + R2'$ соответственно. Из двух точек пересечения выбираем ту, у которой абсцисса больше.

Очевидно, что координаты точек 1 и 2 имеют вид:

$$x[1] = H - T - \frac{L2}{2}; \quad y[1] = b;$$

(38)

$$x[2] = x[1]; \quad y[2] = y_c^3.$$

Координаты точки сопряжения 3 определяются пересечением прямой, соединяющей центры (x_c^3, y_c^3) и (x_c^2, y_c^2) , с окружностью, центр которой расположен, например, в точке (x_c^2, y_c^2) (см. П.5).

Аналогично, координаты точки сопряжения 4 определяются пересечением прямой, соединяющей центры (x_c^1, y_c^1) и (x_c^2, y_c^2) , с этой же окружностью.

Координаты точек 5 и 6 вычисляются по формулам:

$$x[5] = x_c^1 + R1'; \quad y[5] = y_c^1;$$

(39)

$$x[6] = x[5]; \quad y[6] = b'.$$

Точки сопряжений образующей диска с внутренней стороны колеса, которая представлена на рис.1е, определяются аналогично. Нумерация точек сопряжений, как указано выше, при всех расчетах выполнялась таким образом, чтобы обеспечивался обход контура всего профиля против хода часовой стрелки.

Окончательно массив точек сопряженного контура колеса формируется последовательным включением в него точек сопряжений ступицы, диска с внутренней стороны колеса, обода и диска с наружной стороны колеса. Также формируется массив точек «скелетного» контура. Сопряженный контур в дальнейшем используется для расчета основных геометрических параметров профиля колеса, а также его объема и массы. Скелетный контур наряду с сопряженным используется для автоматизированного построения контура колеса, и служит основой для простановки на нем размеров.

Определим объем и массу колеса. На основе известных координат точек сопряжений контура радиального сечения колеса по известной методике [5,7] аналитически точно выполняется расчет площади S этого сечения и радиуса r_c его центра тяжести. При этом контур сечения колеса заменяется многоугольником с $3n$ вершинами и n секторами, где n – количество особых окружностей. Особой окружностью называется любая окружность, дуга которой принадлежит контуру. Точка пересечения линий, принадлежащих контуру, рассматривается как особая окружность нулевого

радиуса. Строится $3n$ ориентированных треугольников с общей вершиной в начале координат. Площадь сечения S вычисляется как сумма площадей ориентированных треугольников и секторов.

Радиус r_c в принятой системе координат (см. рис.1а) равен ординате центра тяжести сечения, которая вычисляется как отношение соответствующего статического момента сечения к его площади. А указанный статический момент является суммой соответствующих статических моментов ориентированных треугольников и секторов.

Расчет объема V колеса выполняется по формуле, полученной для тел вращения [6]

$$V = 2\pi \cdot r_c \cdot S. \quad (40)$$

Масса m колеса вычисляется по известной формуле

$$m = V\rho, \quad (41)$$

где ρ - плотность металла.

Таким образом, предложенный метод расчета координат точек сопряжений контура сечения колеса включает семь основных этапов, сущность которых изложена выше. Они являются общими для всех типов колес. Разработаны алгоритмы и программы для расчета указанных координат и построения на их основе контуров радиальных сечений железнодорожных колес.

Литература

1. *Производство железнодорожных колес / Г.А. Бибик, А.М. Иоффе, А.В. Праздников, М.И. Староселецкий - М.: Металлургия, 1982. - 232 с.*
2. *Бергхаузер Т., Шлив П. Система автоматизированного проектирования AutoCAD: Справочник: Пер. с англ. -М.: Радио и связь, 1989. -256 с.*
3. *Яковченко А.В., Ивлева Н.И., Луговой А.В. Метод автоматизированного проектирования штампованно-катаных колес для разработки технологии их производства // Удосконалення процесів і обладнання обробки тиском в металургії і машинобудуванні: Тематич. зб. наук. пр. - Краматорськ, 2002. - С. 485-490.*
4. *Совершенствование технологии производства железнодорожных колес и методов ее разработки на ПЭВМ / А.В. Яковченко, Б.А. Перков, Е.В. Горб и др. // Металлургическая и горнорудная промышленность. - 2001. - № 7. - С. 74-78.*
5. *Писаренко Ф.А., Долженков Ф.Е. Применение ЭВМ, оснащенных графическими дисплеями, для калибровок валков сложных фасонных профилей / Донецк, 1978. - 43 с. (Препр. / ИЭП АН УССР).*

6. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов.- М.: Наука. Главная редакция физико-математичес-кой литературы, 1981. -720 с.*

7. *Справочник по сопротивлению материалов / Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. - 2-е изд. перераб. и доп. -Киев: Наук. думка, 1988. -736 с.*

© Яковченко А.В., Ивлева Н.И. 2008