

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОНИЧЕСКОЙ ПЕРЕДАЧИ С ДВОЯКОВЫПУКЛО-ВОГНУТЫМИ ЗУБЬЯМИ****Самойлова А.В., Онищенко В.П.***(ДонНТУ, г. Донецк, Украина)***Введение**

Передачи транспортных и горных машин относятся к тяжелонагруженным зубчатым передачам, при проектировании которых предъявляются жесткие требования к минимизации их габаритов, массы и стоимости. Реализация этих жестких требований приводит к значительному росту удельной силовой нагруженности, а требование максимизации производительности машин приводит к росту скоростных характеристик привода. К этому следует добавить динамический характер внешнего нагружения и значительную загрязненность окружающей среды мелкодисперсными веществами абразивного характера. Все перечисленные факторы приводят к износу поверхностей зубьев, что снижает время эксплуатации зубчатых передач.

В последние годы с целью повышения несущей способности зубчатых передач применяют зубчатые передачи с двояковыпукло-вогнутыми зубьями (ДВВ) и, в частности, конические передачи [1]. Конические колеса с ДВВ зубьями выгодно отличаются от конических прямозубых колес высокой нагрузочной способностью, большей плавностью зацепления и значительным снижением шума. Они обладают рядом преимуществ перед коническими колесами с круговым зубом и колесами с зацеплением Новикова. Преимущество конических передач с ДВВ зубьями перед коническими колесами с круговым зубом заключается в том, что они имеют разную кривизну в двух направлениях (шестерня выполняется с двояковыпуклыми, а колесо с двояковогнутыми зубьями), вследствие чего уменьшаются контактные напряжения. В отличие от колес с зацеплением Новикова, в которых торцевой коэффициент перекрытия равен нулю ( $\varepsilon_a = 0$ ), колеса с ДВВ зубьями имеют торцевой коэффициент перекрытия больший единицы ( $\varepsilon_a > 1$ ).

Недостатком этих колес является сложность изготовления. Опыт эксплуатации показал, что конические обкатные колеса с круговыми ДВВ зубьями внешнего зацепления имеют высокую работоспособность. Однако, если расчету зубьев цилиндрических эвольвентных передач на износ уделяется большое внимание [2], то расчет конических передач с двояковыпукло-вогнутыми зубьями на износ вообще не производится.

Оценка долговечности зубчатых передач по исходным параметрам эвольвентных профилей зубьев является приближенной и не учитывает тот факт, что из-за износа зубьев форма профиля становится отличной от эвольвентной, в результате чего изменяются нагрузочно-кинематические параметры контакта, которые в свою очередь, изменяют темп изнашивания и форму профилей зубцов. В связи с этим, исследования, направленные на разработку средств прогнозирования изменения качественных характеристик конических зубчатых передач с двояковыпукло-вогнутыми зубьями в зависимости от времени их эксплуатации являются актуальными и отвечают требованиям научно-технического прогресса современного машиностроения.

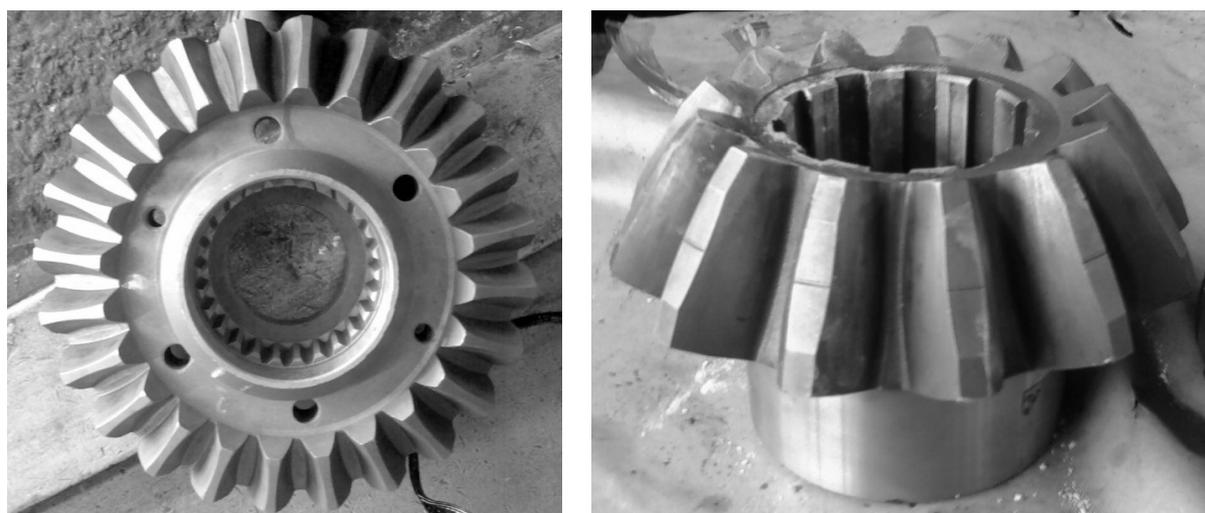
**Основное содержание работы**

Проблемой износа зубьев зубчатых передач занимались многие исследователи. Петрусевич А.И. сделал предположение, что повреждения зубьев взаимосвязаны. Так

искажения профиля зуба в результате износа приводит к уменьшению радиусов кривизны и, как следствие, к ускоренному развитию выкрашивания и появлению заедания рабочих поверхностей. Эта гипотеза была подтверждена экспериментально. Дж.Р. Мыга экспериментально показал, что искажение профилей закаленных зубьев в результате износа существенно влияет на динамические нагрузки в зацеплении [3]. А. Вилк, Дж. Ш. Куанг и А.Д.Лин ввели в динамическую модель профили изношенных колес, используя упрощенную модель профилей изношенных зубьев и считая передаточное отношение постоянным [4]. Ю.Войнаровский и Онищенко В.П. провели аналитические и экспериментальные исследования влияния деформации и износа зубьев на динамику зубчатых колес. Результаты экспериментов показали, что изменение профиля зубьев во время износа нужно учитывать при расчетах на долговечность зубчатых передач [5]. Анализ литературных данных показал, что проблема износа конических колес с круговыми ДВВ зубьями практически не освещена.

Настоящая работа посвящена решению первого этапа исследования несущей способности конических колес с круговыми ДВВ зубьями – разработке объемной математической модели зацепления. На базе этой модели будут решаться задачи динамики зацепления зубчатых колес с изношенными зубьями и проблемы прогнозирования качественных характеристик передачи в процессе эксплуатации машины.

На рисунке 1 представлены зубчатое колесо и шестерня с круговыми ДВВ зубьями привода режущей части угледобывающего комбайна 2РКУ10.



а)

б)

Рис. 1. Зубчатое колесо (а) и шестерня (б) с двояковыпукло-вогнутыми зубьями

Для разработки методики оценки долговечности ДВВ конических колес требуется создать два типа математических моделей зацепления передач: - с неизношенными и изношенными зубьями шестерни и колеса. Для математического описания профильной поверхности зуба была принята ортогональная система координат (рис. 2). Ось абсцисс является осью симметрии зуба, ось ординат проходит через начальную точку эвольвенты профиля, ось аппликат проходит вдоль образующей основного конуса, как показано на рисунке 2.

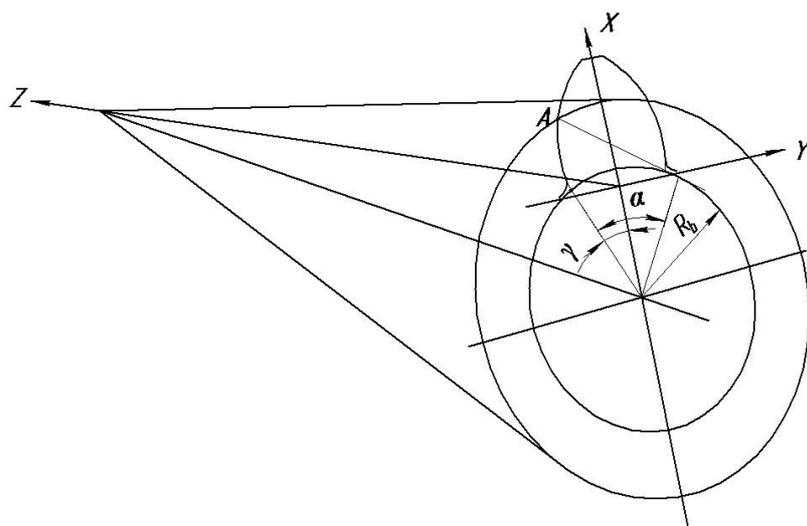


Рис. 2. Система координат для математического описания профильной поверхности зубьев

Математическая модель боковой поверхности зуба шестерни имеет вид:

$$\text{Левый профиль} \quad \begin{cases} x_{ш} = \frac{R_b}{\cos(\alpha)} \cos(\gamma - tg\alpha + \alpha) \\ y_{ш} = -\frac{R_b}{\cos(\alpha)} \sin(\gamma - tg\alpha + \alpha) - R + \sqrt{R^2 - B_i^2} \\ z_{ш} = B_i \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Правый профиль} \quad \begin{cases} x_{ш} = \frac{R_b}{\cos(\alpha)} \cos(\gamma - tg\alpha + \alpha) \\ y_{ш} = \frac{R_b}{\cos(\alpha)} \sin(\gamma - tg\alpha + \alpha) + R - \sqrt{R^2 - B_i^2} \\ z_{ш} = B_i \end{cases} \quad (2)$$

где  $x_{ш}$ ,  $y_{ш}$ ,  $z_{ш}$  – координаты точек профиля зуба шестерни,  
 $R_b$  – радиус основной окружности зубчатого колеса,  
 $\alpha$  – эвольвентный угол,  
 $\gamma$  – угловая координата начальной точки эвольвенты,  
 $B_i$  – расстояние от искомой точки до торца зуба.

Матрица, описывающая боковую поверхность зуба шестерни, имеет следующий вид:

$$M_{ш} = \begin{vmatrix} x_{ш1}, y_{ш1}, z_{ш1} \\ x_{ш2}, y_{ш2}, z_{ш2} \\ \dots \dots \dots \\ x_{шn}, y_{шn}, z_{шn} \end{vmatrix} \quad (3)$$

Математическая модель боковой поверхности зуба колеса имеет вид:

$$\text{Левый профиль} \quad \begin{cases} x_{ш} = \frac{R_b}{\cos(\alpha)} \cos(\gamma - tg\alpha + \alpha) \\ y_{ш} = -\frac{R_b}{\cos(\alpha)} \sin(\gamma - tg\alpha + \alpha) + R - \sqrt{R^2 - B_i^2} \\ z_{ш} = B_i \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{Правый профиль} \quad \begin{cases} x_{ш} = \frac{R_b}{\cos(\alpha)} \cos(\gamma - tg\alpha + \alpha) \\ y_{ш} = \frac{R_b}{\cos(\alpha)} \sin(\gamma - tg\alpha + \alpha) - R + \sqrt{R^2 - B_i^2} \\ z_{ш} = B_i \end{cases} \quad (5)$$

где  $x_k, y_k, z_k$  – координаты точек профиля зуба колеса,  
 $R_b$  – радиус основной окружности зубчатого колеса,  
 $\alpha$  – эвольвентный угол,  
 $\gamma$  – угловая координата начальной точки эвольвенты,  
 $B_i$  – расстояние от искомой точки до торца зуба.

Матрица, описывающая боковую поверхность зуба колеса, имеет следующий вид:

$$M_k = \begin{vmatrix} x_{k1}, y_{k1}, z_{k1} \\ x_{k2}, y_{k2}, z_{k2} \\ \dots \dots \dots \\ x_{kn}, y_{kn}, z_{kn} \end{vmatrix} \quad (6)$$

В результате анализа конфигураций и конструкций шестерни и колеса были созданы их твердотельные модели, представленные на рисунках 3 и 4.

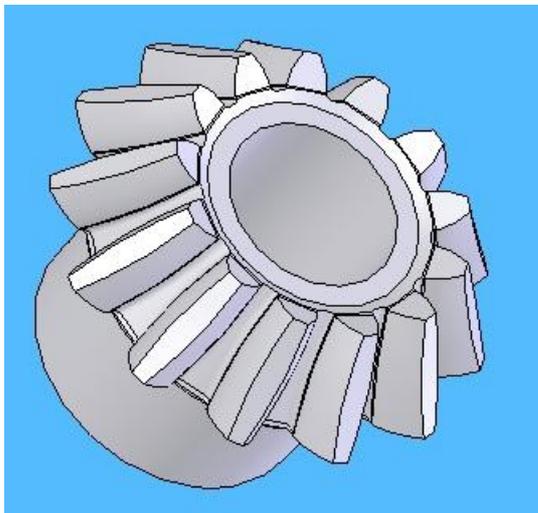


Рис. 3. Твердотельная модель двойковыпуклой шестерни

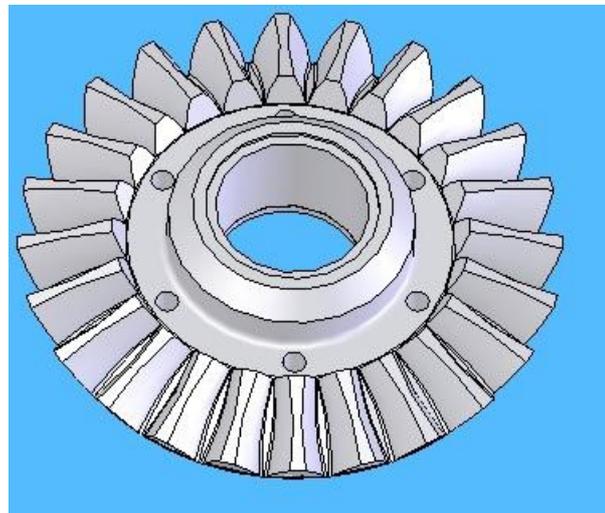


Рис. 4. Твердотельная модель двойковогнутого колеса

В дальнейшем построена твердотельная модель зацепления, представленная на рисунке 5.

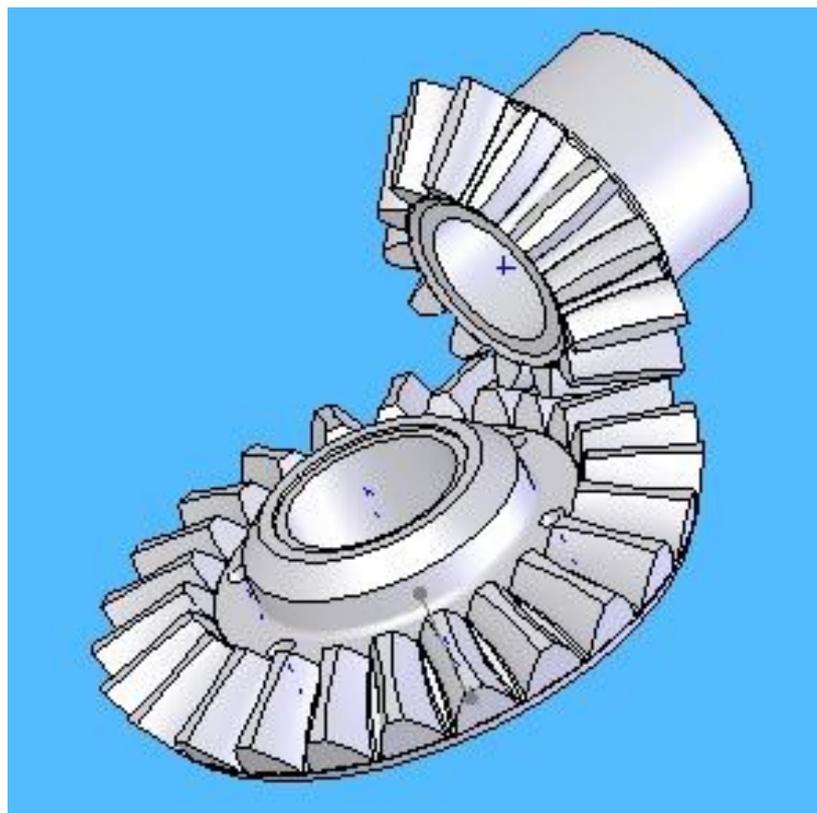


Рис. 5. Твёрдотельная модель зацепления двояковыпукло-вогнутой конической пары с круговыми зубьями

После построения твёрдотельной модели зацепления двояковыпукло-вогнутой конической пары с круговыми зубьями было проверено и подтверждено постоянство передаточного отношения.

Далее были рассчитаны скорости скольжения контактируемых профилей по следующей зависимости:

$$V_{ск} = l_{КР} \cdot (\omega_1 + \omega_2) \quad (7)$$

где  $l_{КР}$  – расстояние от полюса зацепления до точки контакта;

$\omega_1$  – угловая скорость шестерни;

$\omega_2$  – угловая скорость колеса.

В теории зубчатого зацепления скольжения между профилями в полюсе зацепления отсутствует. Чем дальше расположена контактная точка относительно полюса зацепления, тем больше скорость скольжения. Распределение скоростей скольжения представляет собой прямую линию. Для подтверждения этих теоретических закономерностей и, соответственно, адекватности полученной модели был построен график изменения скоростей скольжения в зацеплении.

График изменения скоростей скольжения  $V_{ск}$  в зависимости от угла поворота шестерни  $\varphi$  представлен на рисунке 6.

Из графика (рис. 6) видно, что распределение скоростей скольжения представляет собой прямую линию, что полностью соответствует теоретическим данным. Следовательно, полученная математическая модель является адекватной.

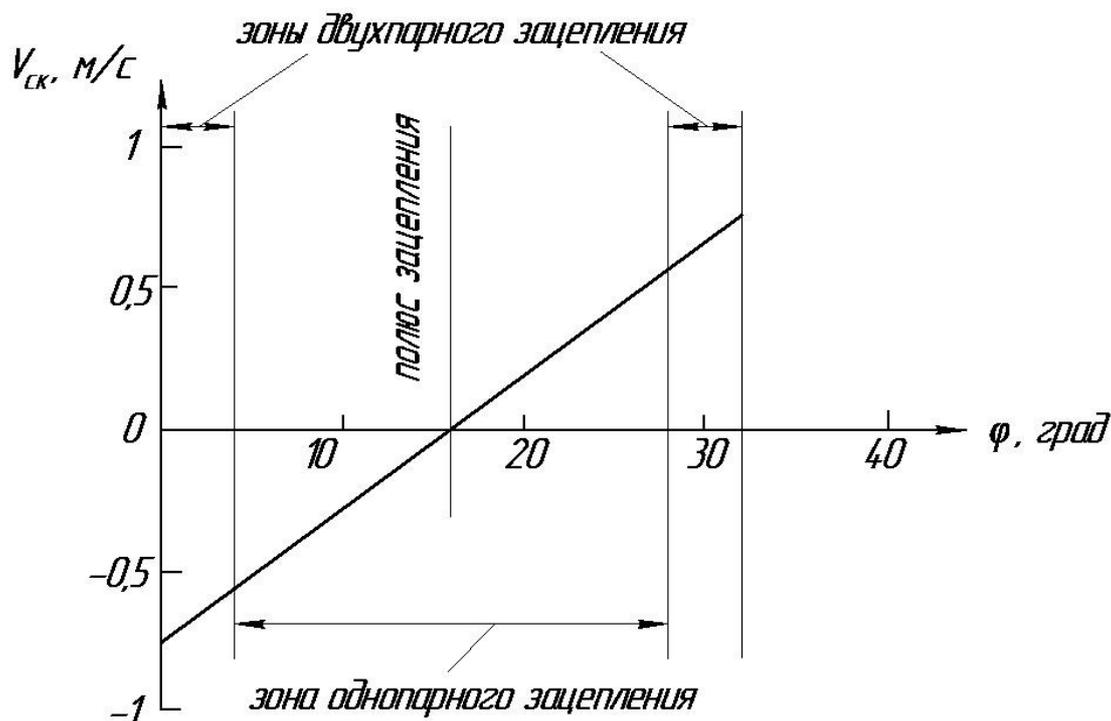


Рис. 6. График изменения скоростей скольжения в зацеплении

### Выводы

На основании анализа литературных и экспериментальных данных установлено, что профиль колес с ДВВ зубьями, который они приобретают после изготовления, в процессе эксплуатации из-за неизбежного износа искажается и после того, как степень искажения превысит допустимую погрешность, определяемую заданной степенью точности, профиль перестает соответствовать начальным характеристикам. Вновь образованные квазисопряженные профили и параметры их зацепления по мере эксплуатации зубчатой передачи непрерывно изменяются, в результате чего оценка износа по исходным параметрам не может быть применима для описания зубчатой передачи с изношенными зубьями. Следовательно, конические колеса с круговыми ДВВ зубьями представляют значительный интерес для исследования. Для расчета зубчатых передач на износ была создана математическая пространственная модель зацепления конической пары с круговыми ДВВ зубьями. В дальнейшем возможно использование вышеизложенной математической модели для прогнозирования долговечности конических колес с круговыми ДВВ зубьями. Данная модель является адекватной, так как соблюдается постоянство передаточного отношения в процессе вращения шестерни и колеса, а распределение скоростей скольжения представляет собой прямую линию.

**Список литературы:** 1. СТП 12.44.28.028 – 76 «Передачи зубчатые конические с круговыми двояковыпукло-вогнутыми зубьями». 2. Валентин Онищенко «Прогнозирование долговечности тяжело нагруженных зубчатых передач на основе моделирования износа зубьев», МЕХАНИКА, z.131, Gliwice, 1999. 3. Myga J.R. Wplyw zuzycia zeba na wielkosc sil dynamicznych. Praca doctorska, Politechnika Slaska, Gliwice, 1976. 4. Wilk A. Wplyw parametrow technologicznych i konstrukcyjnych na dynamike przekladni o zebach prostych. Zeczyty naukowe Politechniki Slaskiej, Gliwice, 1977, 320 s. 5. Войнарівські

Юзеф, Оніщенко В.П. Вплив зношування зубців на динамічні характеристики зубчастої передачі// Вибрації в техніці і технологіях, Всеукраїнський науково технічний журнал. – 2000. – №1, Вінниця: Вінницький державний аграрний університет. – С. 34-42.

### МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ КОНІЧНОЇ ПЕРЕДАЧІ З ДВООПУКЛО-ВВІГНУТИМИ ЗУБЦЯМИ

Самойлова А.В., Оніщенко В.П.

У даній статті була розроблена просторова математична модель зачеплення конічної пари з круговими двоопукло-ввігнутими зубцями. Була перевірена і підтверджена сталість передатного відношення зубчастої передачі, а також розраховані швидкості ковзання контактуючих профілів. Подана модель включає математичну модель бічної поверхні двоопукло-ввігнутих зубців шестерні і колеса, а також матрицю, що описує профільну поверхню зубців. Дана математична модель дозволить розрахувати зубчасту пару на знос і розробити методику оцінки довговічності конічної передачі з круговими двоопукло-увігнутими зубцями.

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОНИЧЕСКОЙ ПЕРЕДАЧИ С ДВОЯКОВЫПУКЛО-ВОГНУТЫМИ ЗУБЬЯМИ

Самойлова А.В., Оніщенко В.П.

В данной статье была разработана пространственная математическая модель зацепления конической пары с круговыми двояковыпукло-вогнутыми зубьями. Было проверено и подтверждено постоянство передаточного отношения зубчатой передачи, а также рассчитаны скорости скольжения контактируемых профилей. Представленная модель включает в себя математическую модель боковой поверхности двояковыпукло-вогнутых зубьев шестерни и колеса, а также матрицу, описывающую профильную поверхность зубьев. Данная математическая модель позволит рассчитать зубчатую пару на износ и разработать методику оценки долговечности конической передачи с круговыми двояковыпукло-вогнутыми зубьями.

### MATHEMATICAL MODEL OF CONICAL GEAR TRANSMISSION WITH BICONVEX-CONCAVE TEETH

Samoylova A.V., Onischenko V.P.

Three-dimensional mathematical gearing model of conical pair with circular biconvex-concave teeth was developed in this paper. Constancy of gear ratio was tested and confirmed, and also sliding velocities of contacting profiles were calculated. The presented model involves mathematical model of lateral face of pinion and wheel biconvex-concave teeth, and also matrix, describing the teeth profiled surface. Given mathematical model will allow to calculate the gear pair on the wear and develop the longevity evaluation procedure of bevel transmission with conical circular biconvex-concave teeth.

*Рецензент: к.т.н., доц. Воронцов Б.С.*