УДК 681.513.5:681.511.4

К ВОПРОСУ О ФУНКЦИЯХ КВАЗИСТАБИЛИЗАЦИИ ПРОИЗВОДНОЙ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЯ

Волков Р.В., аспирант
(Ростовская-на-Дону государственная академия сельхозмашиностроения, г. Ростов-на-Дону, Россия)

Характерным для задач оптимального управления является то, что точные аналитические решения удается получить лишь в редких случаях. Сложность или невозможность получения аналитических результатов для задач в достаточно общей постановке привели к развитию вычислительных и приближенных методов построения оптимального управления. Более эффективна ориентация на построение т.н. квазиоптимальных систем с близкими к экстремальным, но робастными свойствами. В наибольшей степени это относится к задаче оптимального быстродействия (ОБ).

Перспективным подходом к построению общей теории квазиоптимизации быстродействия является разработка системы математических моделей (ММ) на основе нелинейных дифференцируемых функций, эффективно аппроксимирующих кусочно-непрерывные и кусочно-разрывные функции, описывающие решения в системах ОБ [1,2].

В работе [3] для количественной оценки «степени квазиоптимальности» вводится параметр ε, варьирование которого позволяет изменять эту степень вплоть до получения оптимального варианта. При этом параметрическое ε-квазиоптимального ДУ можно представить в виде[3]:

$$\dot{x} = \mathrm{f}_{\varepsilon}(x, \varepsilon), \tag{1}$$

Свойства параметрического ε-квазиоптимального ДУ (1):

1) При $\varepsilon > 0$, решение асимптотически устойчиво, а его пределом при $\varepsilon \to 0$ является функция, доставляющая экстремум критерию оптимизации.

2) Функция $\mathrm{f}_{\varepsilon}(x, \varepsilon)$ задается аналитически.

3) Учитывается ограничение на предельную интенсивность изменения переменной $x : v_m > 0$.

4) Собственно быстродействие, как критерий оптимизации:

$$\mathrm{f}_{\varepsilon}(x, \varepsilon) = \begin{cases} -v_m \,\mathrm{sign}(x)\, \forall x \neq 0; \\ 0\, \forall x = 0. \end{cases}$$

В [1] предложено аппроксимировать разрывную функцию $\mathrm{sign}(x)$ непрерывно дифференцируемой функцией $\mathrm{sign}(x) \approx x(x^2 + \varepsilon^2)^{-0,5}$. В результате был получен эффективный вариант представления $\mathrm{f}_{\varepsilon}(x, u, \varepsilon)$:

$$\mathrm{f}_{\varepsilon}(x, \varepsilon) = -v_m x(x^2 + \varepsilon^2)^{-0,5}, \tag{2}$$

квазиоптимальность которого была строго доказана.

По аналогии с (2) нелинейный динамический эталон первого порядка сформируем в виде

$$\mathrm{f}_{\varepsilon}(x,\varepsilon) = -v_m\,\mathrm{th}(x/\varepsilon)\,. \qquad (3)$$

Для наглядной иллюстрации свойств функции $\mathrm{th}(x/\varepsilon)$ на рис. 1 приведены приближения, определяемые различными значениями ε ($\varepsilon = 2;1;0,5;0,1$). Рис. 1 наглядно показывает, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathrm{th}(x/\varepsilon) = \mathrm{sign}(x)$. Динамический эталон (3) отвечает требованию аналитичности. Так как $|\dot{x}| = |\mathrm{f}_{\varepsilon}(x,\varepsilon)| = |-v_m\,\mathrm{th}(x/\varepsilon)| \le v_m$, $\forall x$, причем $\lim\limits_{|x|\to\infty}|\mathrm{f}_{\varepsilon}(x,\varepsilon)| = v_m$, $\lim\limits_{|x|\to 0}|\mathrm{f}_{\varepsilon}(x,\varepsilon)| = 0$, то выполняется требование ограничения на предельную интенсивность изменения переменной x.

<u>Предложение.</u> При $\varepsilon \to 0$ пределом времени t_{reg}^{kob} достижения общим решением дифференциального уравнения

$$\dot{x} = -v_m\,\mathrm{th}(x/\varepsilon) \qquad (4)$$

значения δx_0, где x_0 – произвольное начальное условие решения, $0<\delta<1$, является время $t_{reg}^{ob} = |x_0|\,v_m^{-1}(\delta-1)$ достижения того же значения ОБ-уравнения (1) при ограничении производной $\dot{x}$ значением v_m.

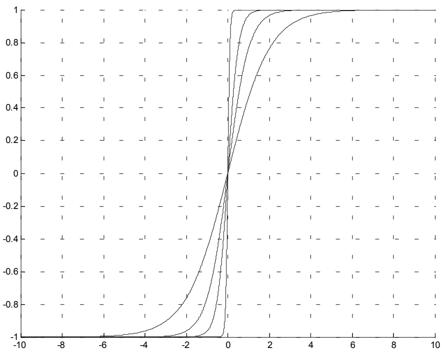

Рис. 1 График функции $\mathrm{th}(x/\varepsilon)$

Доказательство. Разделяя переменные и интегрируя уравнение (4) от t_0 до $t_0 + t_{reg}^{kob}$ по t, от x_0 до δx_0 по x, можно получить $t_{reg}^{kob} = -\varepsilon v_m^{-1}\ln\left|\mathrm{sh}(\delta x_0\varepsilon^{-1})/\mathrm{sh}(x_0\varepsilon^{-1})\right|$, при этом в пределе получим $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} t_{reg}^{kob} = |x_0|\,v_m^{-1}(\delta-1) = t_{reg}^{ob}$.

Таким образом, отклонение времени затухания кривой решения параметрического ε-квазиоптимального ДУ (4) от оптимального может быть теоретически сделано сколь угодно малым, причем без потери свойства асимптотической устойчивости. Следовательно, нелинейный динамический эталон, заданный выражением (3), реализует две задачи: 1) ограничивает скорость изменения переменной x величиной v_m в общем решении этого уравнения; 2) стабилизирует вблизи v_m значение этой скорости при любых x, значимо отличных от 0, приближая время решения к минимально возможному для принятого ограничения. Согласно [1] нелинейный динамический эталон (3), основанный на функции $\mathrm{y}(x) = \mathrm{th}(x)$, является функцией квазистабилизации производной общего решения уравнения (1) и может быть использован для синтеза квазиоптимальных по быстродействию законов управления. В частности, в работе [4] приведен пример использования нелинейных динамических эталонов в составе АСУ ТП.

При наличии в ММ динамической системы некоторой функции $z(t)$, которую переменная состояния должна динамично отслеживать мерой состояния решения является функция ошибки управления $e(t) = z(t) - x(t)$. Тогда по аналогии с ДУ (1) можно сформировать параметрическое ε-квазиоптимального ДУ вида

$$\dot{x} = \mathrm{f}_{\varepsilon}(z(t) - x(t), \varepsilon). \qquad (5)$$

В работе [2] $\mathrm{f}_{\varepsilon}(z(t) - x(t), \varepsilon)$ формируется на основе динамического эталона (2). Проведем имитационного моделирование на ЭВМ ДУ (5) с динамическим эталоном (3):

$$\dot{x} = -v_m \,\mathrm{th}\left[\left(z(t) - x(t)\right)/\varepsilon\right]. \qquad (6)$$

Такая структура уравнения (6) ограничивает и стабилизирует на предельном уровне скорость изменения переменной состояния x, но близость решения к оптимуму определяется уже соотношением текущей ошибки e и параметра квазиоптимальности ε. На рис. 2 представлены результаты моделирования системы с ММ (6) при $z(t) = 3\sin(t)$, $\varepsilon = 0{,}1$, $v_m = 2$ и $v_m = 3$. Видно, что при $v_m = 3$ (рис. 2.В), что отвечает условию $\max(\dot{x}) = \max(\dot{z})$, кривые $x(t)$ и $z(t)$ практически совпадают и предельная ошибка управления не превышает 7%.

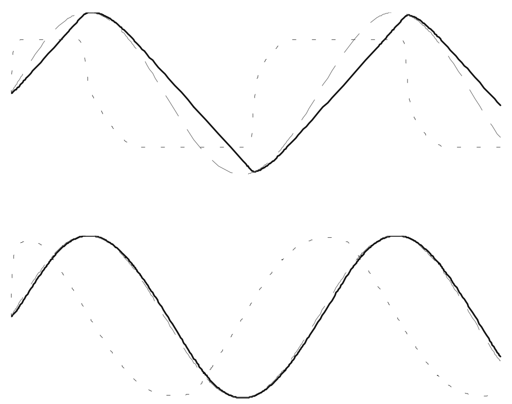

Рис. 2 Графики переходных процессов, задающего и управляющего воздействия

Доклад написан в рамках гранта А03-3.16-189 для поддержки НИР аспирантов высших учебных заведений Министерства образования РФ конкурса 2003г. "Квазиоптимальное по быстродействию управление на основе нейросетевых технологий".

Перечень ссылок

1. Нейдорф Р.А. Нелинейное ускорение динамических процессов управления объектами первого порядка с учетом ограниченности воздействий// Вестник ДГТУ: Управление и диагностика в динамических системах. Ростов-на-Дону: Издательский центр ДГТУ, 1999.-С. 13-21

2. Нейдорф Р.А. Эффективная аппроксимация кусочных функций в задачах квазиопти-мального по быстродействию управления. Математические методы в технике и технологиях - ММТТ-2000: Сб. трудов Междунар. науч. конф. В 7-и т. Т. 2. Секции 2, 8/ Санкт-Петербургский гос. Технол. ин-т (техн. ун-т). Санкт-Петербург, 2000.- с. 18-22.

3. Нейдорф Р.А. Нелинейная организация асимптотически устойчивых квазиоптимальных по быстродействию движений. // Сб. докл. Всерос. науч. конф. 3-4 апр. 2003 г. "Управление и информационные технологии". СПб., 2003. Т.1. С.189-194.

4. Волков Р.В., Нейдорф Р.А. Теория и практика квазиоптимального по быстродействию управления в технических системах и АСУ ТП // Информатика и системы управления. 2003. № 2(6). С. 144 - 155.